1. УВОД

1.1. ПОЈАМ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

"У једној земљи Далеког истока живео је некад један краљ, који је сваке ноћи узимао нову жену и следећег јутра наређивао да је погубе. После неког времена људи су постали смртно уплашени, јер је долазио ред и на њихове кћери да по једну ноћ буду краљице. Тада Шехерезада, кћер краљевог саветника, која је била мудра као и њен отац, замоли оца да и она постане краљева жена и да са собом као пратиљу поведе своју сестру. Њен отац је био запањен таквом молбом, али је знао да је његова кћер толико мудра да би могла учинити крај том страшном краљевом понашању. И тако се његова кћер Шехерезада венчала са краљем.

После вечере Шехерезада је замолила краља да се опрости са својом сестром. Када је Шехерезадина сестра ушла, затражила је да јој Шехерезада исприча једну од њених прелепих бајки. Шехерезада је почела да прича једну бајку, а када је завршила, краљ је био толико усхићен, да је хтео да чује још једну причу. Тако је Шехерезада из ноћи у ноћ – 1001 ноћ причала краљу по три или пет бајки. У међувремену је краљ заволео Шехерезаду, поштедео јој живот, а она му је подарила троје деце".

Тако су настале чувене бајке из хиљаду и једне ноћи, али и древни математички проблеми:

<u>ПРИМЕР 1.</u> Колико би ноћи било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку ако би у току неких ноћи причала по 5 бајки, а у току осталих ноћи по 3 бајке ?

<u>ПРИМЕР 2.</u> Колико највише, а колико најмање ноћи је било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку, причајући по 3, односно 5 бајки за једну ноћ ?

<u>ПРИМЕР 3.</u> На колико различитих начина је Шехерезада могла да исприча 1001 бајку, уз услов да неких дана прича по 3, а неких дана по 5 бајки ?

Ако се број дана у којима је Шехерезада причала по 3 бајке означи са x, а број дана у којима је Шехерезада причала по 5 бајки са y, онда се проблеми 1, 2. и 3. могу моделирати једначином

$$3x + 5y = 1001.$$

Очигледно је да су бројеви x и y ненегативни цели бројеви, јер број дана не може бити ни рационалан, ни негативан.

Решење проблема 1, 2. и 3. се тада своди на следећа питања:

- Да ли је уопште могуће решити дату једначину и ако јесте како то урадити, а ако није, како доказати да једначина нема решења ?
- Одредити "најмање", односно "највеће" решење дате једначине ?
- Колико укупно решења има дата једначина ?

Анализу заслужује и следећи проблем:

<u>ПРИМЕР 4.</u> Постоји ли квадар чији су мерни бројеви ивица цели бројеви, а дијагонала квадра је 65 cm ?

Ако се ивице тог квадра обележе са a, b и c, онда се коришћењем Питагорине теореме добија да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 65^2 = 4225.$$

Опет је из услова задатка јасно да су тражени бројеви a, b и c природни, али се опет намећу и следећа питања:

- Да ли такав квадар уопште постоји ?
- Ако постоји колике су његове ивице и како их израчунати ?
- Да ли постоји само један или више таквих квадара ?

<u>ПРИМЕР 5.</u> Оловка кошта пола динара, гумица један динар, а свеска 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 предмета?

Ако број оловки означи са x, број гумица са y и број свески са z, онда се добија следећи систем једначина:

$$x + y + z = 100$$
$$\frac{1}{2}x + y + 5z = 100.$$

Добијене једначине су примери Диофантових једначина [1].

Дакле, алгебарске једначине или системи алгебарских једначина са рационалним коефицијентима чија решења припадају скупу целих (или рационалних) бројева, или неком од његових подскупова називају се алгебарским Диофантовим једначинама.

[1] Диофант Александријски је последњи велики антички математичар и 3. века нове ере, а први који се систематично бавио једначинама са целобројним решењима.

Прва од наведених једначина је линеарна Диофантова једначина са две променљиве. Друга једначина је квадратна Диофантова једначина са три променљиве, а трећа је систем од две линеарне Диофантове једначине са три променљиве.

Обично се претпоставља да Диофантова једначина има две или више променљивих, а да систем Диофантових једначина има више непознатих него једначина.

Међутим, следећи примери ће показати егзистенцију и неких других врста Диофантових једначина и проблема:

<u>ПРИМЕР 6.</u> *Одредити четири узастопна природна броја таква да је збир кубова прва три броја једнак четвртом.*

Очигледно се ради о једначини $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3$ која јесте Диофантова, али са једном променљивом.

<u>ПРИМЕР 7.</u> *Решити једначину $x^2 + 1 = 2^y$ ако су x и y природни бројеви.*

Дата једначина јесте Диофантова али није алгебарска, већ експоненцијална, јер се непозната у налази у експоненту.

Уопштено, формулом $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ целобројне (или рационалне) променљиве, n природан број и Φ функција[2] датих променљивих, дефинисана је једна Диофантова једначина.

Домен ове Диофантове једначине је скуп Z^n (или Q^n ако се ради о рационалним променљивим).

Решење Диофантове једначине $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, је свака уређена n – торка целих (или рационалних) бројева $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ која задовољава једнакост: $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Ако је $\alpha_1 = f_1(p, q, r, \ldots)$, $\alpha_2 = f_2(p, q, r, \ldots)$, …, $\alpha_n = f_n(p, q, r, \ldots)$ (p, q, r, ... су целобројни параметри) онда је $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ опште решење дате једначине.

<u>ПРИМЕР 8.</u> *Ако су x и y цели бројеви колико решења имају следеће једначине: a) $x^2 + y^2 = 3$; b) $x^2 + y^2 = 5$; c) $x^2 + 2y = 24$.*

---

[2] Најчешће је та функција алгебарска са рационалним коефицијентима , па се говори о алгебарским Диофантовим једначинама. Међутим, нису ретке ни експоненцијалне Диофантове једначине као и једначине које су задате формулом $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где је Φ нека сложена функција.

Очигледно је да прва једначина нема целобројних решења, јер не постоје цели бројеви чији је збир квадрата 3.

Друга једначина има четири решења: (2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1).

Како је у трећој једначини $x^2 = 24 - 2y = 2(12 - y)$, то x мора бити паран број, тј. $x = 2к$, где је к неки цео број. Тада је $4к^2 = 24 - 2y$, па је $y = 12 - к^2$.

Формулама $x = 2к$, $y = 12 - 2к^2$ тада је дато опште решење једначине, и јасно је да за свако к из скупа целих бројева добијамо уређени пар $(x, y) = (2к, 12 - 2к^2)$ као решење једначине, што значи да једначина има бесконачно много решења.

Закључак је да Диофантове једначине могу бити без решења, а ако решења једначине постоје, онда их може бити коначно или бесконачно много.

На основу претходних примера и разматрања очигледно је да су основна питања везана за Диофантове једначине:

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговори на ова питања су често веома тешки, што теорији Диофантових једначина даје веома велики значај и чини је једном од најинтересантнијих у елементарној математици. Строга систематизација метода за решавање Диофантових једначина сигурно не би била потпуна, јер се општи поступак може конструисати само за неке класе једначина.

Међутим, присутна је изузетно велика разноврсност идеја које се користе у разрешавању наведених питања. Зато ће се у редовима који следе покушати са систематским излагањем неких, до сада познатих, идеја за решавање Диофантових једначина чиме ће се проблематика решавања Диофантових једначина у извесној и могућој мери ипак на неки начин систематски посматрати.

1. 2. МЕТОД РАЗЛИКОВАЊА СЛУЧАЈЕВА [3]

Метод разликовања случајева је један од најексплоатисанијих метода за решавање математичких проблема. У теорији Диофантових једначина он није свемогућ, али је сигурно најчешће коришћен, било самостално, било у комбинацији са другим методама. Зато метод, пре извесног уопштавања, треба илустровати са неколико примера који се односе на Диофантове једначине.

<u>ПРИМЕР 9.</u> *Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, тако да је* $p^2 + q = 101$. [4]

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја :

1) Ако је p = 2, онда је q = 99 – 4 = 97 $\in$ P.

2) Ако је $p \geq 3$, онда је p непаран број, па је $q = 101 - p^2$ паран број, што значи да је q = 2, јер је 2 једини паран прост број. Тада је $p^2 = 99$, па у овом случају нема решења.

Дакле, једино решења проблема је (2, 97). Δ[5]

<u>ПРИМЕР 10.</u> *Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је* $xy - 3x + 2y = 7$*?*

РЕШЕЊЕ: Ако се једначина напише у облику xy – 3x + 2y – 6 = 1, онда се растављањем леве стране једнакости на чиниоце добија еквивалентна једначина (x + 2)(y – 3) = 1. Како производ два броја (x + 2) и (y – 3) м0же бити 1, само ако су оба 1 или оба –1, разликују се два случаја :

1) x + 2 = 1 и y – 3 = 1, тј. x = -1 и y = 4;
2) x + 2 = - 1 и y – 3 = - 1, тј x = - 3 и y = 2. Δ

<u>ПРИМЕР 11.</u> *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи једнакост* $xy^2 + 4 = 2006\,y$.

---

[3] Детаљније о методу разликовања случајева видети у чланцима:
1) др Марица Д. Прешић: Метода доказивања разликовањем случајева – "Математика" бр 3/79, Загреб, 1979.
2) Војислав Андрић: Решавање проблема методом разликовања случајева – "Математика" бр 3/81, Загреб, 1981.

[4] Скуп природних бројева у раду је обележен са N, а скуп целих бројева са Z. Скуп простихбројева у раду је обележен са P, а скуп сложених бројева са S.

[5] Крај доказа теореме означен је увек са ◊ , а крај решеног примера са Δ .

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је y = 0, онда је 4 = 0, па y = 0 није решење дате једначине;

2) Ако је $y \neq 0$, онда је $xy - \frac{4}{y} = 2000$ или $xy - 2000 = \frac{4}{y}$. Како су x и y природни бројеви, то је xy - 2000 цео број, па је и $\frac{4}{y}$ цео број. Закључак је да y мора бити делилац броја 4 и зато су могући једино случајеви:

2.1) Ако је y = 1, онда је x = 2004;

2.2) Ако је y = 2, онда је x = 1002;

2.2) Ако је y = 4, онда је 4x = 2001 и једначина нема решења, јер је паран број 4x никада није једнак непарном броју 2001.

Према томе једина решења су парови: (2004, 1) ; (1002, 2) Δ

<u>ПРИМЕР 12.</u> Производ два двоцифрена броја у декадном систему је записан само помоћу четворки. Одредити чиниоце тог производа.

РЕШЕЊЕ: Производ два двоцифрена броја увек је већи од 100, а мањи од 10000. Према томе тражени производ може бити или 444 или 4444.

1) Како је 444 = 4·111 = 4·3·37, то је једно решење 12·37.

2) Слично је 4444 = 4·1111 = 4·11·101 = 44·101. Како је 101 прост број, то у овом случају не постоје таква два двоцифрена броја, броја, па проблем нема решења. Δ

<u>ПРИМЕР 13.</u> Доказати да не постоје цели бројеви x и y такви да је $x^2 + y^2 = 2006$.

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2 и y^2 је 2006, дакле паран, па се разликују само два случаја, јер случај да су x и y различите парности није могућ, пошто би тада збир $x^2 + y^2$ био непаран:

1) Ако су бројеви x и y парни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је x = 2к и y = 2l. Тада је $4к^2 + 4l^2 = 2006$. Како је лева страна једначине дељива са 4, а десна није, то једначина у овом случају нема решења.

2) У случају да су бројеви x и y непарни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је x = 2к+1 и y = 2l+1. Тада је $4к^2 + 4к + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2006$, односно $4к^2 + 4к + 4l^2 + 4l = 2004$. Упрошћавањем једначине добија се к(к + 1) + 1(l + 1) = 501. Како је са леве стране једначине увек паран број, а са десне непаран број, то једначина ни у овом случају нема решења. Δ

На основу изложених примера и њихових решења може се размотрити и општији проблем:

Одредити скуп свих решења проблема P(x, y, z, …) где су x, y, z, … променљиве које егзистирају у оквиру датог проблема.

Нека је S непразан скуп који представља област дефинисаности датог проблема P (x, y, ...).

Метод разликовања случајева заснива се на чињеници да се скуп S може поделити на коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2, \dots S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_к = S$ ($Si \cap Sj = \varnothing$; i, j $\in N$, за свако $i \neq j$), дакле таквих да они у потпуности прекривају скуп могућих решења S.

Метод разликовања случајева, решавање проблема P своди на решавање проблема P у сваком од скупова $S_1, S_2, \dots S_к$. Нека су $R_1, R_2, \dots R_к$ решења проблема P, у сваком од скупова $S_1, S_2, \dots S_к$ (при чему неки од њих могу бити и празни) Тада је решење R проблема P унија решења $R_1, R_2, \dots R_к$, тј. $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_к$.

То је можда дуготрајнији, али методолошки лакши посао, јер се скупови $S_1, S_2, \dots S_к$ могу бирати тако да решавање проблема P у њима буде што једноставније.

Метод разликовања случајева је погодан метода за решавање Диофантових једначина, али њену моћ не би требало прецењивати, јер и она попут других метода садржи извесну произвољност. Конкретно, поставља се питање: Како раздвојити случајеве ?

Раздвајање случајева и јесте највећи проблем приликом примене овог метода, јер се не може унапред одредити како разбијати скуп S. Међутим, из приказаних примера и досадашњег разматрања, искуствено се могу формулисати следећи методолошки принципи:

1. При раздвајању случајева, скуп потенцијалних решења, тј. скуп S у потпуности се прекрива са коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2, \dots S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_к = S$ (принцип потпуности). На тај начин се избегава могућност да било које потенцијално решење буде изостављено.

2. За метод разликовања случајева од нарочитог значаја су случајеви:

(а) Када у одабраном подскупу S_i $(1 \leq i \leq k)$ дати проблем P нема ниједно решење, тј. $R_i = \varnothing$ и

(b) Када у одабраном подскупу S_j $(1 \le j \le k)$ дати проблем P увек има решења, тј. када је $R_j = S_j$.

Зато при разликовању случајева треба уочити што више подскупова који задовољавају услове (a) и (b) (принцип рационалности).

3. Приликом разликовања случајева и прекривања скупа потенцијалних решења дисјунктним подскуповима (кад год је то плодотворно) користити логична разбијања скупа могућих решења S. У теорији бројева најчешће се скуп целих бројева или неки његов подскуп, разбија : на парне и непарне; на негативне, нулу и позитивне; на класе еквиваленција по одређеном модулу, … (принцип природности).

4. Метод разликовања случајева заснива се на примени већ познатих математичких истина (Питагорине теореме, познатих неједнакости, …) које се као случајеви јављају у решавању проблема P (принцип примене).

Метод разликовања случајева није свемогућ, нити универзалан, али може бити веома користан у решавању многих проблема, па и Диофантових једначина.

При том, принцип 2(a) је од нарочитог значаја, јер он служи за елиминацију случајева који немају реалан смисао, те се на тај начин скуп потенцијалних решења своди на неку од својих рестрикција. Ово је и примарно методолошко упутство које указује на први корак у раздвајању случајева, а он је свођење скупа могућих решења на што мање подскупова.

У наредним поглављима и примерима систематски се илуструје примена метода разликовања случајева и других поступака на решавање Диофантових једначина.

ЗАДАЦИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

1. У једнакостима * + * = * - * = * · * = ** : * уместо звездица ставити цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 тако да се свака цифра употреби само једном и да све једнакости буду тачне.

2. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p^2 + q^2 = 2007$.

3. Доказати да једначина $x^2y - xy^2 = 2006$ нема решења у скупу целих бројева.

4. Колико има двоцифрених природних бројева који су седам пута већи од збира својих цифара?

5. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - x^2 - 2$ нема решења. Доказати.

6. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $x^4 + 5 = xy^2 + x^2y$.

7. Постоји ли двоцифрен природни број који је једнак збиру квадрата својих цифара?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

8. Одредити све просте бројеве p, q и r који задовољавају једначину $p^q + q^p = r$. (Србија 1991.)

9. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног природног броја записује се у декадном запису само помоћу неколико цифара 2. Одредити о којим бројевима је реч. (Србија 1996.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

10. Дешифруј следећи математички ребус: $\overline{\text{б р о ј}} = (\text{б} + \text{р} + \text{о} + \text{ј})^4$.

11. Постоји ли двоцифрен природан број чији је квадрат једнак кубу збира његових цифара?