10. ОСТАЛЕ КВАДРАТНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

10.1. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = pz^2$

Једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ има тривијално решење x = y = z = к. Али се поставља питање и других решења.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одредити опште решење једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$.

РЕШЕЊЕ: У задатку 490. доказано је да једначина $x^2 + y^2 = n$ има једнак број решења[40] као једначина $x^2 + y^2 = 2n$, па је чак успостављена и једнозначна коресподенција између решења ових деју једначина: $(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$.

То значи да ако Питагорина једначина $x^2 + y^2 = z^2$ има опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = |m^2 - n^2 + 2mn|$, $y = |m^2 - n^2 - 2mn|$ и $z = m^2 + n^2$. Треба нагласити да су услови за параметре m и n једнаки условима код Питагорине једначине.

Раније је доказано да Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ сем тривијалног решења (0, 0, 0) нема других решења.[41]

Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 4z^2$ се може посматрати и у облику $x^2 + y^2 = (2z)^2$, па је јасно да је тада (x, y, 2z) Питагорина тројка. То значи да је њено опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $2z = m^2 + n^2$, уз додатне услове за природне бројеве m и n: (1) $m > n$; (2) m и n су исте парности (јер ће само тако z бити природан број).[42]

Међутим, решења једначине $x^2 + y^2 = 4z^2$ се могу посматрати и као кореспондентна са решењима једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$. Тада ће се добити опште решење: $x = 4mn$, $y = 2(m^2 - n^2)$ и $z = m^2 + n^2$.

Овај начин решавања проблема је интересантан због тога што је очигледно да једначина $x^2 + y^2 = pz^2$ има нетривијалниа решења и лако се долази до решење за све бројеве $p = 2^к$.

---

[40] То значи и да ако једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења, онда их нема ни једначина $x^2 + y^2 = 2n$.

[41] Видети раније разматрано потпоглавље 4.10. о решавању Диофантових једначина методом "најмањег" решења

[42] Као што је за Питагорине бројеве направљена таблица решења, тако се може учинити и за све друге једначине чија решења зависе од више параметара.

Слично се може посматрати и једначина $x^2 + y^2 = 5z^2$. Она има тривијално решење (к, 2к, к). Ако се примени Диофантов метод, после увођења смене једначина се своди на $a^2 + b^2 = 5$, а потом се трансформацијом $a = 2 + mt$, $b = 1 + nt$, и враћањем смене добија опште решење једначине: $x = 2n^2 - 2m^2 – 2mn$, $y = m^2 – n^2 - 4mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Једначина $x^2 + y^2 = 6z^2$ сем тривијалног (0, 0, 0) нема других целобројних решења. Ово следи из већ поменуте чињенице да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења (број решења је 0), јер тада и једначина $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3z^2$ има исти број решења.

Ако је $x^2 + y^2 = 7z^{2,}$ онда се методом "најмањег" решења може доказати да дата једначина, сем тривијалног нема других решења.

Једначина $x^2 + y^2 = 8z^2$, спада у класу једначина $x^2 + y^2 = 2^кz^2$ и има нетривијално решење.

Јасно је да једначина $x^2 + y^2 = 9z^2$ има тривијално решење (3к, 0, к). Како је $x^2 + y^2 = (3z)^2$, онда је опште решење једначине дефинисано релацијама: $x = 6mn$, $y = 3(m^2 – n^2)$ и $z = m^2 + n^2$.

За једначину $x^2 + y^2 = 10z^2 = 5 \cdot 2z^2$ се опште решење може извести из решења једначине $x^2 + y^2 = 5z^2$ и процес истраживања се може наставити појединачним разматрањима.

10.2. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + py^2 = z^2$

Једначина $x^2 + 2y^2 = z^2$ се трансформацијом $2y^2 = z^2 – x^2 = (z + x)(z – x)$ своди на систем једначина $z + x = 2y$, $z – x = y$. Како y мора бити паран број, значи y = 2к, добија се да је $z = \dfrac{3y}{2} = 3к$ и

$x = \dfrac{y}{2} = к$. Дакле, једно решење је x = к, y = 2к, z = 3к.

Овим једноставним трансформацијама су дата само нека, али не и сва решења. Диофантовим методом добија се једно од могућих класа решења решења: $x = 2n^2 – m^2 – 8mn$, $y = 2m^2 – 4n^2 – 2mn$ и $z = 3(m^2 + 2n^2)$. Међутим, могуће је и далеко општије разматрање.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Одредити опште решење једначине $x^2 + 2y^2 = z^2$.

РЕШЕЊЕ: Из $x^2 + 2y^2 = z^2$ следи да су x и z исте парности. Како је $2y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$, то су $z + x$ и $z - x$ парни бројеви. Нека је $z + x = 2a$ и $z - x = 2b$, па је $2y^2 = 4ab$ и $y^2 = 2ab$. Дакле, y мора бити паран број, а 2ab је потпун квадрат. Нека је $a = 2m^2$ и $b = n^2$ $(m, n \in N)$. Тада је $x = 2m^2 - n^2$, $y = 2mn$ и $z = 2m^2 - n^2$ $(m, n \in N)$. Ако је $a = m^2$ и $b = 2n^2$ $(m, n \in N)$. Тада је $x = m^2 - 2n^2$, $y = 2mn$ и $z = m^2 - 2n^2$ $(m, n \in N)$.Δ

Ако се посматра једначина $x^2 + 3y^2 = z^2$, онда је тривијално решење једначине $x = y = z = к$. Диофантов метод доста лако даје једну класу решења: $x = 3n^2 - m^2 - 6mn$, $y = m^2 - 3n^2 - 2mn$ и $z = 2(m^2 + 3n^2)$. Општије решење се може добити поступком сличним поступку у примеру 134, који може бити универзалан и примењив не само за $p = 3$, већ за сваки природан број p.

Очигледно је да за свако p које је природан број дата једначина $x^2 + py^2 = z^2$ има бесконачно много решења која се добијају трансформацијом $py^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$ и решавањем једног од могућих систем једначина (на пример) $z + x = py$, $z - x = y$. Ако се стави да је $y = 2к$, добија се фамилија решења: $x = (p - 1)к$, $y = 2к$, $z = (p + 1)к$.

"Боља" решења се могу добити Диофантовом и другим методама.[43] [44]

10.3. ЈЕДНАЧИНА $px^2 + qy^2 = rz^2$

Једначина $px^2 + qy^2 = rz^2$ где су p, q и r дати природни бројеви се може разматрати слично претходним случајевима.[45] Размотримо неколико конкретних примера:

<u>ПРИМЕР 3.</u> Одредити опште решење једначине $2x^2 + 7y^2 = z^2$ у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Једно партикуларно решење ће помоћи да се Диофантовим методом одреди бар једна формула која генерише бесконачно много решења. Како је једно такво решење $x_o = 3$, $y_o = 1$, $z_o = 5$, једначина има бесконачно много решења која генеришу формуле: $x = 3к$, $y = к$, $z = 5к$.

---

[43] Једно решење једначине $x^2 + py^2 = z^2$, за ситуацију када је p прост број видети у књизи Jože Graselli: Diofantske enačbe – Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

[44] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

[45] Опште решење квадратне Диофантове једначине видети у књизи Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије Београд, 2004, стр. 50-51.

Класа решења се добија Диофантовим методом и после обављених трансформација следи двопраметарско решење дате Диофантове једначине: $x = 21n^2 – 54m^2 – 70mn$, $y = 2m^2 – 63n^2 – 60mn$; $z = 5 (2m^2 + 7n^2)$.Δ

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Одредити сва решења једначине $3x^2 + 5y^2 = 30z^2$ у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Како су $5y^2$ и $30z^2$ дељиви са 5 то мора и $3x^2$ бити дељиво са 5, што значи да је $x = 5a$. Тада се добија једначина $75a^2 + 5y^2 = 30z^2$. Дељењем са 5 следи да је $15a^2 + y^2 = 6z^2$. Како су $15a^2$ и $6z^2$ дељиви са 3, то мора бити и y^2, па је $y = 3b$. Тада је $15a^2 + 9b^2 = 6z^2$ и дељењем са 3 добија се једначина $5a^2 + 3b^2 = 2z^2$. Једно од могућих решења добијене једачине је $a_o = 1$, $b_o = 1$ и $z_o = 2$.

Добијена једначина је еквивалентна са једначином:

$5\left(\frac{a}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{z}\right)^2 = 2$. Ако се уведе смена $\alpha = \frac{a}{z}$ и $\beta = \frac{b}{z}$, онда је $5\alpha^2 + 3\beta^2 = 2$. Једно решење добијене једначине је $\alpha o = \beta o = \frac{1}{2}$. Ако је $\alpha = \frac{1}{2} + mt$ $\beta = \frac{1}{2} + nt$, добија се да је $t = -\frac{5m + 3n}{5m^2 + 3n^2}$. После примене свих коришћених смена добија се двопараметарска класа решења дате једначине: $x = 5 (3n^2 – 5m^2 – 6mn)$; $y = 3(5m^2 – 3n^2 – 10mn)$ и $z = 2(5m^2 + 3n^2)$. Δ

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Доказати да једначина $4x^2 + 16y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако се уведу смене $2x = a$ и $4y = b$, једначина постаје $a^2 + b^2 = 3z^2$. Раније је доказано да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева, чиме је доказано да и дата једначина нема решења. Δ

10.4. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ се може посматрати као проширење Питагорине једначине. Постављају се класична питања: да ли једначина има и колико решења? Може ли се одредити опште решење?

ПРИМЕР 6. *Доказати да Питагориних четворки, тј. бројева који задовољавају једначину $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, где су x, y, z и t природни бројеви, има бесконачно много.*

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, то је (3, 4, 12, 13) једна Питагорина четворка. Међутим, тада је и (3к, 4к, 12к, 13к) такође Питагорина четворка, што доказује да Питагориних четворки има бесконачно много, мада добијено решење не описује и све Питагорине четворке. Δ

ПРИМЕР 7. *Одредити бар једну од фамилија формула x = x(к), y = y(к), z = z(к) и t = t(к) таквих да је $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.*

РЕШЕЊЕ: Решење $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$, као и решење поменуто у претходном примеру $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ указују на формулу x = к, y = к+1, z = к(к+1) и t = $к^2$ + к + 1. Заиста је $x^2 + y^2 + z^2 = к^2 + (к+1)^2 + (к(к+1))^2 = к^2 + к^2 + 2к + 1 + к^4 + 2к^3 + к^2 = к^4 + к^3 + к^2 + к^3 + к^2 + к + к^2 + к + 1 = к^2(к^2 + к + 1) + к(к^2 + к + 1) + (к^2 + к + 1) = (к^2 + к + 1)^2 = t^2$. Δ

Ако би се у истраживању једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ кренуло и мало даље могло би се закључити следеће:

ПРИМЕР 8. *Опште решење једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ у скупу природних бројева дефинисано је следећим релацијама: x = 2p, y = 2q,*

$$z = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{r} \quad и \quad t = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$$

где су p, q и r природни бројеви који испуњавају следеће услове: (1) $p^2 + q^2$ је дељиво са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$.

РЕШЕЊЕ: Како број t^2 при дељењу са 4 даје остатак 0 или 1, то и лева страна једнакости мора имати исти остатак при дељењу са 4. Јасно је да ако је t паран онда и x, y и z морају бити парни, па се дељењем једначине са 4 (једном, два, или више пута), опет на крају долази до случаја када је t непаран. Тада је очигледно да су два од три броја x, y и z парни, а један непаран.

Нека је x = 2p и y = 2q[46]. Нека је z непаран. Како је t > z и како су оба непарна то је њихова разлика паран број, тј. t – z = 2r или t = 2r + z. Како је $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, то је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4q^2 = t^2 - z^2 = (t - z)(t + z) = 2r(2r + z + z) = 4r^2 + 4rz$.

[46] Видети текст у књизи Jože Graselli: Diofantske enačbe – Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

Из једнакости $4p^2 + 4q^2 = 4r^2 + 4rz$ следи да је $p^2 + q^2 - r^2 = rz$. Тада је $z = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$ уз услове: (1) збир $p^2 + q^2$ је дељив са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$. Δ

Нека решења дате једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ приказана су, слично Питагориним бројевима у следећој табели која је сортирана по растућим вредностима броја t:

p	q	p^2+q^2	r	x	y	z	t
1	1	2	2	2	2	1	3
2	1	5	1	4	2	4	6
3	1	10	2	6	2	3	7
4	2	20	4	8	4	1	9
3	1	10	1	6	2	9	11
6	2	40	8	12	4	3	13
5	1	26	2	10	2	11	15
7	1	50	5	14	2	5	15
6	4	52	4	12	8	9	17

<u>ПРИМЕР 9.</u> Одредити све бројеве x, y, z, тако да важи једнакост $x^2 + y^2 + z^2 = 15^2$.

РЕШЕЊЕ: На основу теореме 16. следи да је $t = \dfrac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$, односно $p^2 + q^2 + r^2 = 15r$. Провером за разне вредности r ($0 < r < t = 15$) добија се да је $p^2 + q^2 \in \{14, 26, 36, 44, 50, 54, 56\}$. Како је $26 = 1^2 + 5^2$, $36 = 0^2 + 6^2$; $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, то су сва решења: $2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$; $0^2 + 12^2 + 9^2 = 15^2$; $2^2 + 14^2 + 5^2 = 15^2$; $10^2 + 10^2 + 5^2 = 15^2$. Δ

10.5. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ је већ разматрана за n једнако 2 и 3. Наредни примери показују да једначина има бесконачно много решења, а могу се извести и много детаљнија разматрања проблема.[47] [48]

[47] Детаљније о овој једначини видети у књизи Jože Graselli – Diofantske enačbe, Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

[48] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

<u>ПРИМЕР 10.</u> Доказати да једначина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2$ има бесконачно много решења.

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, то је фамилија решења дате једначине дефинисана уређеном петорком (3к, 4к, 12к, 84к, 85к), где је к било који природан број. Очигледно је да таквих решења има бесконачно много, чиме је доказ завршен.Δ

Сличан доказ се може извести и за општи случај.

<u>ПРИМЕР 11.</u> Доказати да једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења.

РЕШЕЊЕ: Доказ се изводи математичком индукцијом по n (n ≥. 2).

1) За n = 2 тврђење важи (теорема о Питагориним тројкама).

2) Претпоставимо да једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења.

3.1.) Ако је x_{n+1} паран број, онда је $x_{n+1} = 2к$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к$, $y_{n+1} = к^2 - 1$, $y_{n+2} = к^2 +1$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$. Како је по индукцијској претпоставци једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења то и једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ има бесконачно много решења.

3.2) Ако је x_{n+1} ненепаран број, онда је $x_{n+1} = 2к + 1$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к + 1$, $y_{n+1} = 2к(к + 1)$, $y_{n+2} = к^2 + (к +1)^2$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ и даљи ток доказа је идентичан доказу под 3.1). Δ

Идеја садржана у овом претходном доказу може бити квалитетно искоришћена за формирање Питагориних n-торки ($3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$...) и решавање квадратних Диофантових једначина облика $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$. Идеја је доста једноставна, јер се при преласку са Питагорине n-торке, на n+1-торку уствари тражи Питагорина тројка која као катету садржи x_n. Конкретан алгоритам који разматра начин решавања ове Диофантове једначине је присутан у литератури[49] и може се веома успешно пренети и на рачунаре, чиме се олакшава израчунавање решења. [50]

[49] Видети књигу Jože Graselli – Diofantske enačbe, Ljubljana, 1984. стр. 66 - 70.
[50] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

10.6. НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ СИСТЕМИ КВАДРАТНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Једна од најједноставнијих примена третираних квадратних Диофантових једначина је могућа код система једначина. Неки системи Диофантових једначина већ су коришћени у претходним поглављима. О још неким системима квадратних Диофантових једначина ће бити речи у наредним примерима, при чему се мора нагласити да у овој проблематици нема потребе за неким великих теоријским уводима.

<u>*ПРИМЕР 12.*</u> *Одредити све целе бројеве x и y тако да је* $x^3 - y^3 = 91$.[51]

РЕШЕЊЕ: Иако ово није у суштини систем, већ једна једначина, она се у ствари своди на систем Диофантових једначина, од којих је једна квадратна. Како је $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ и како је $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + (x+y)^2\right) \geq 0$ то значи да су оба фактора, дакле $x - y$ и $x^2 + xy + y^2$ позитивна, јер њихов производ мора бити $91 = 7 \cdot 13$. Због тога се разликују четири случаја:

1) $x - y = 1$ и $x^2 + xy + y^2 = 91$; 2) $x - y = 7$ и $x^2 + xy + y^2 = 13$;

3) $x - y = 13$ и $x^2 + xy + y^2 = 7$; 4) $x - y = 91$ и $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Решавањем ова четири система добијају се и сва решења датог проблема: (- 5, - 6); (3, - 4); (4, - 3); (6, 5). Δ

<u>*ПРИМЕР 13.*</u> *Мејснеров проблем: У скупу природних бројева решити систем једначина:* $x + y = zt$, $z + t = xy$.[52]

РЕШЕЊЕ: Ако се дате једначине саберу добија се једначина $xy + zt = x + y + z + t$, одакле је $xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2$. Факторизацијом се добија следећа једначина: $(x - 1)(y - 1) + (z - 1)(t - 1) = 2$. Разликују се три случаја:

---

[51] Задатак је са 1. МО у Пољској 1949. године. Видети књигу Старшевич С, Бровкин Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978.

[52] Задатак је са 29. Московске МО из 1967. године. Видети књигу Гальперин Г.А., А.К. Толпыго: Московские математические олимпиады – "Просвещение", Москва, 1987.

1) Ако је $(x - 1)(y - 1) = 0$, онда је $(z - 1)(t - 1) = 2$. Тада је је $x = 1$ или $y = 1$, а из $(z - 1)(t - 1) = 2$ се добијају две могућности: $z = 2$, $t = 3$ или $z = 3$, $t = 2$. Тада је $x + y = 6$ и $xy = 5$, па се добијају следећа решења: (1, 5, 2, 3); (1, 5, 3, 2); (5, 1, 2, 3); (5, 1, 3, 2).

2) Ако је $(x - 1)(y - 1) = 1$ и $(z - 1)(t - 1) = 2$, онда је $x = y = z = t = 2$.

3) $(x - 1)(y - 1) = 2$ и $(z - 1)(t - 1) = 0$, добијају се решења која су симетрична са случајем под 1). Дакле решења су: (2, 3, 1, 5); (2, 3, 5, 1); (3, 2, 1, 5); (3, 2, 5, 1).

Према томе једначина има укупно 9 решења. Δ

<u>ПРИМЕР 14.</u> Одредити све целе бројеве x, y и z који задовољавају једначине $z^2 - xy = x + y + 6$ и $x^2 + y^2 = z^2$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$, онда је прва једначина система постаје $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, па се множењем са 2 добија $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy = 14$. Добијена једначина $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 14$ има решења ако су сабирци 1^2, 2^2 и 3^2.

Разликовањем случајева добијају се решења друге једначине $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, односно једначине $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 14$. Та решења су: (2, -1); (-1, 2); (0, 3); (3, 0); (4, 3); (3, 4). Очигледно да другу једначину $x^2 + y^2 = z^2$ задовољавају само решења $(x, y, z) \in \{(0, 3, 3); (3, 0, 3), (3, 4, 5); (4, 3, 5)\}$.

<u>ПРИМЕР 15.</u> Доказати да систем једначина: $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = t^2$ нема решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$ и $y^2 + z^2 = t^2$, онда је $x^2 + t^2 = 2z^2$. Добијена једначина има решења $x = x_o - t_o$, $t = x_o + t_o$, где су x_o и t_o решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$.[53] Како је опште решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$ дато формулама $x_o = 2mn$, $t_o = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће једначина $x^2 + t^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = m^2 - n^2 - 2mn$, $t = m^2 - n^2 + 2mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Како је из друге једначине система $y^2 = t^2 - z^2$, то је $y^2 = (m^2 - n^2 + 2mn)^2 - (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 2mn - m^2 - n^2) = (2m^2 + 2mn)(2mn - 2n^2) = 2m(m + n)2n(m - n)$. Дакле, $y^2 = 4mn(m^2 - n^2)$. Нека је $D(m, n) = d$. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $m = ad$ и $n = bd$. Следи да је $y^2 = 4mn(m^2 - n^2) = 4ad \cdot bd(a^2d^2 - b^2d^2) = 4ab \cdot d^4(a^2 - b^2)$.

[53] Видети поглавље 10.1.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4 (a^2 - b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 - b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab (a^2 - b^2)$ био потпун квадрат потребно је да буде $a^2 - b^2 = к^2 a \cdot b$, одно-сно $a^2 - к^2 a \cdot b - b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по a, решавањем једначине се добија $a_{1,2} = \dfrac{к^2 b \pm \sqrt{к^4 b^2 + 4b^2}}{2} = \dfrac{к^2 b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}$.

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = p^2$ има јединствено решење $p = 2$, $к = 0$.

Ако је $к = 0$, онда је $a^2 - b^2 = к^2 a \cdot b = 0$, па је $a = b$, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

541. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $x^2 + y^2 = 13z^2$ има бесконачно много решења. Доказати. Могу ли се описати сва решења дате једначине.

542. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 7z^2$, сем тривијалног решења нема других решења у скупу целих бројева.

543. Опште решење Диофантове једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$ дато је формулама: $x = m^2 - 2n^2$, $y = m^2 + 4mn + 2n^2$ и $z = m^2 + 2mn + 2n^2$ (m и n су природни бројеви). Доказати.

544. Одредити природне бројеве a, b и c такве да је $a^2 + b^2 + 3c^2 = (a + b + c)^2$.

545. Одредити опште решење једначине $x^2 + 5y^2 = z^2$

546. Одредити опште решење једначине $x^2 + 2y^2 = 4z^2$.

547. Ако је p прост број, а m и n природни бројеви, онда су сва решења једначине $x^2 + py^2 = z^2$ дата формулама: $x = m(pn^2 - 1)$; $y = 2mn$ и $z = m(pn^2 + 1)$. Доказати.

548. Ако су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ природни бројеви онда бројеви $x_1 = -t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2$; $x_2 = 2t_1t_2$; ... ; $x_n = 2t_1t_n$ и $x_{n+1} = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2$ задовољавају једначину $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1}^2$. Доказати.

549. Доказати да систем једначина: $x + y = zt$, $z + t = xy$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

550. Доказати да систем једначина $x^2 + 7y^2 = z^2$ и $7x^2 + y^2 = t^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

551. Који су потребни и довољни услови да система једначина $x + py = n$ и $x + y = p^z$ има решење у скупу природних бројева, ако су n и p природни бројеви. Доказати да број решења који се добија при тим условима не може бити већи од 1. (Мађарска - 1905.)[54]

552. Доказати да за сваки природан број n једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y^2$ има решења у скупу природних бројева. (ДР Немачка 1981.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

553. Може ли се између једначина $x^2 + y^2 = p$ и $x^2 + y^2 = pz^2$ успоставити аналогија када је у питању вредности природног броја p за које једначине имају, односно немају решења.

554. Може ли се одредити опште решење једначине $x^2 + py^2 = z^2$, ако је p прост број?

555. Испитати за које вредности природног броја n Диофантова једначина $nx^2 + (n+1)y^2 = (n+2)z^2$ има целобројна решења?

[54] Ово је вероватно прва Диофантова једначина која се појавила на неком математичком такмичењу у свету.