11. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СТЕПЕНА n (n > 2)

После квадратних Диофантових једначина нормално је да се пажња посвети и неким алгебарским Диофантовим једначинама степена већег од два. Не упуштајући се у теоријска разматрања кроз примере ћемо илустровати неколико карактеристичних једначина трећег, четвртог и виших степена. Основни метод решавања ових једначина је коришћење идентичних алгебарских трансформација и већ познатих чињеница о Диофантовим једначинама.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Доказати да једначина $x^2 + y^2 = z^4$ има бесконачно много решења, ако су x, y и z цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 + y^2 = z^4 = (z^2)^2$, то је (x, y, z^2) Питагорина тројка. Значи да постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, z) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 – q^2$ и $z = p^2 + q^2$. Дакле, опште решење дате једначине је $x = 4pq(p^2 – q^2)$; $y = |4p^2q^2 – (p^2 - q^2)^2|$; $z = p^2 + q^2$. Из добијеног општег решења јасно је да дата једначина има бесконачно много целобројних решења. Δ

<u>ПРИМЕР 2.</u> Доказати да једначина $x^2 + 5 = y^3$ нема целобројних решења.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су бројеви x и y различите парности и да је $y^3 = x^2 + 5 > 0$. Ако је x непаран онда је $x^2 + 5 \equiv 2 \pmod 4$. Тај случај је немогућ, јер је тада y паран број, па је $y^3 \equiv 0 \pmod 4$. Ако је $x = 2p$ паран, а $y = 2q + 1$ непаран број, добијамо једначину $(2p)^2 + 5 = (2q + 1)^3$, односно $4p^2 + 5 = 8q^3 + 12q^2 + 6q^2 + 1$, па се после дељења са 2 добија $2(p^2 + 1) = 4q^3 + 6q^2 + 3q$. Како је десна страна једнакости дељива са q то мора бити и лева, па је $2(p^2 + 1) = кq$ $(к \in N)$. Добија се једначина $q(4q^2 +(6 – к)q + 3) = 0$. Очигледно $q \neq 0$, јер би тада било $y = 2q + 1 = 1$, па је $x^2 + 5 = 1$, што није могуће. Дакле $4q^2 + (6 - к)q + 3 = 0$.

Решавањем квадратне једначине по непознатој q добија се $q_{1,2} = \dfrac{к - 6 \pm \sqrt{(к - 6)^2 - 48}}{8}$. Да би број q био цео дискримина-нта мора бити потпун квадрат, тј. $(к – 6)^2 – 48 = D^2$.

Решавањем добијене једначине по к и D добијају се вредности за које је q природан број. Дакле q = 1 или q = 3, па је y = 3 или y = 7. Тада је $x^2 + 5 = 27$ или $x^2 + 5 = 343$, па једначина нема целобројних решења. Δ

<u>ПРИМЕР 3.</u> Да ли једначина $x^2 + y^3 = z^4$ има решења у: а) скупу простих бројева; b) скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: а) Разликују се два случаја: z = 2 и z > 2.

Ако је z = 2, онда је $z^4 = 16 = x^2 + y^3$. Јасно је да је $y^3 < 16$, па је $y < 3$, дакле y = 2. Тада је $x^2 = 8$, па једначина нема решења.

Ако је z > 2, онда је z непаран, па је и z^4 непаран број. То значи да на левој страни једнакости један број мора бити паран, а један непаран.

Ако је x = 2, једначина постаје $4 + y^3 = z^4$, па се добија да је $(z^2 + 2)(z^2 - 2) = y^3$. Могућа су два случаја: $z^2 + 2 = y^3$ и $z^2 - 2 = 1$ или $z^2 + 2 = y^2$ и $z^2 - 2 = y$. Како се из првог система једначина добија $y^3 = 5$, а из другог $y^2 - y = 4$, то у овом случају нема решења у скупу простих бројева.

Ако је y = 2, онда је $x^2 + 8 = z^4$, тј. $(z^2 + x)(z^2 - x) = 8$, па је $z^2 + x = 4$ и $z^2 - x = 2$. Како је решење добијеног система $z^2 = 3$ и $x = 1$, закључујемо да једначина нема решења у скупу простих бројева.

b) Из $y^3 = z^4 - x^2 = (z^2 + x)(z^2 - x)$, следи да је једна од могућности $z^2 + x = y^2$ и $z^2 - x = y$. Решавањем добијеног систем следи да је $x = \dfrac{y(y-1)}{2}$ и $8z^2 = 4y^2 + 4y$, па је $8z^2 + 1 = (2y + 1)^2$. Ако се уведу смене $a = 2y + 1$ и $b = 2z$, добија се $a^2 - 2b^2 = 1$ (Пелова једначина). Како ова једначина у скупу целих бројева има бесконачно много решења, то и дата једначина има бесконачно много решења која се могу описати следећим формулама:

$$y_к = \frac{1}{4}\left((3+2\sqrt{2})^к + (3-2\sqrt{2})^к - 2\right);$$

$$z_к = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^к - (3-2\sqrt{2})^к\right);$$

$$x_к = \frac{y_к(y_к - 1)}{2} \quad \text{(к је природан број).}$$

Нека од решења су: (0, 1, 1); (28, 8, 6); (1176, 49, 35)...Δ[55]

[55] Једначина је посебно третирана у скупу простих бројева, јер је решење дато у скупу целих бројева само једно од могућих решења.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^3 - 100 = 225y$?*

РЕШЕЊЕ: Како је $x^3 = 100 + 225у$ и како је десна страна дељи-ва са 5 то мора бити и лева, па је $x = 5к$. Добија се $125к^3 = 100 + 225у$, а после дељења са 25 једнакост $5к^3 = 4 + 9у$ или $5к^3 - 5у = 4у + 4$. Сада је $5(к^3 - у) = 4(у + 1)$, па $у + 1$ мора бити дељиво са 5. Ако се $у = 5m - 1$ ($m \in N$) замени у последњу једначину, онда се добија да је $к^3 = 9m - 1$. Да би $к^3$ био облика $9m - 1$, мора к бити облика $3р - 1$. Следи да је $к^3 = (3р - 1)^3 = 9m - 1$ или $27р^3 - 27р^2 + 9р - 1 = 9m - 1$, тј $m = 3р^3 - 3р^2 + р$. Дакле, $x = 5к = 5(3р - 1)$ и $у = 5m - 1 = 5(3р^3 - 3р^2 + р) - 1$. За сваки цео број р добија се једно решење дате једначине што значи да једначина има бесконачно много решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Решити једначину $x^4 - y^4 = z^2$ у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са $y^4 + z^2 = x^4$ што значи да је (y^2, z, x^2) Питагорина тројка, тј. да постоје природни бројеви m и n такви да је:

1) $y^2 = 2mn$, $z = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 - q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = 4pq\,(p^2 - q^2)$.

Нека је $D(p, q) = d$.

Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $p = ad$ и $q = bd$. Следи да је $y^2 = 4pq\,(p^2 - q^2) = 4ad \cdot bd\,(a^2d^2 - b^2d^2) = 4ab \cdot d^4\,(a^2 - b^2)$.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4\,(a^2 - b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 - b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab\,(a^2 - b^2)$ био потпун квадрат потребно је да важи релација $a^2 - b^2 = к^2\,a{\cdot}b$, односно $a^2 - к^2a{\cdot}b - b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по непознатој a, решавањем добијене једначине следи да је

$$a_{1,2} = \frac{к^2b \pm \sqrt{к^4b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{к^2b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}.$$

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = р^2$ има јединствено решење $р = 2$, $к = 0$.

Ако је к = 0, онда је $a^2 - b^2 = к^2 a \cdot b = 0$, па је a = b, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви.

2) $z = 2mn$, $y^2 = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 - q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = \left|(p^2 - q^2)^2 - 4p^2q^2\right| = \left|p^4 + q^4 - 6p^2q^2\right|$.

Нека је D(p, q) = d. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је p = ad и q = bd. Следи да је $y^2 = d^4\left|a^4 + b^4 - 6a^2b^2\right| = d^4\left|(a^2 - b^2)^2 - 2a^2b^2\right|$.

Дакле, израз $\left|a^4 + b^4 - 6a^2b^2\right|$ мора бити потпун квадрат. Коришћењем метода дискриминанте се доказује да је то немогуће. Δ

11.1. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА МАРКОВА

Диофантова једначина Маркова има облик $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, где су x, y и z цели бројеви. Марков [56] је дату једначину решио користећи искључиво методе елементарне математике.

Тривијално решење дате једначине је x = y = z = 0. Једно од могућих решења једначине је и x = y = z = 1.

Очигледно је да је једначина симетрична и да ако је (a, b, c) једно њено решење онда је решење свака пермутација бројева a, b, c. Међутим, јасно је и да ако је (a, b, c) једно решење једначине, онда је решење и тројке (-a, -b, c), (-a, b, -c) и (a, -b, -c). Због тога ћемо дату једначину посматрати само у скупу природних бројева, јер се остала целобројна решења дефинисана претходним особинама.

Нека је (a, b, c) једно решење Диофантове једначине Маркова. Онда је a једно од решења једначине $x^2 + b^2 + c^2 - 3xbc = 0$. Ако дату једначину посматрамо као квадратну једначину по x, онда она поред решења x = a има још једно решење x = a', при чему на основу Виетових правила важе једнакости $a + a' = 3bc$ и $aa' = b^2 + c^2$. Како је a > 0, то је и a' > 0. Тако решење (a, b, c) дефинише такозвано "суседно" решење (a', b, c).

За решење (1, 1, 1) "суседно" решење по координати x је решење (a', 1, 1) где је a' решење једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$ које је различито од 1. Дакле a' = 2, а ново решење једначине Маркова је (2, 1, 1).

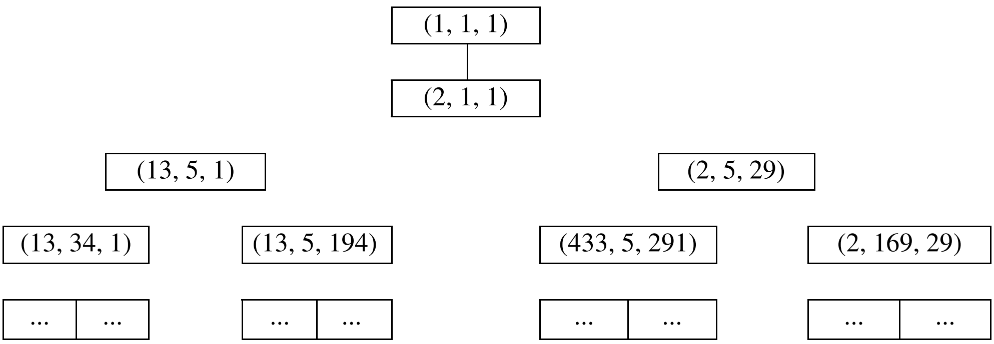
[56] Руски математичар и академик Андреј Андрејевич Марков (1856-1922) је 1879. године решио дату једначину

Решења (1, 1, 1) и (2, 1, 1) Марков назива сингуларним.

За решење (2, 1, 1) "суседно" решења по координати y је решење (2, b, 1), где је b решење једначине $y^2 - 6y + 5 = 0$ различито од 1. Тако добијамо "суседно" решења (2, 5, 1).

Настављајући процес добија се да је за (2, 5, 1) "суседно" решење по координати 1 решење једначине $z^2 - 30z + 29 = 0$ које је различито од 1. Дакле c' = 29 и "суседно" решење (2, 5, 29). Слично по координати 2 "сусуедно" решење је решење једначине $x^2 - 15x + 26 = 0$. 5. Добија се a' = 13 и ново решење једначине Маркова је (13, 5, 1).

Ако се процес настави добија се следеће "дрво" решења:



Уопште свако несингуларно решење (a, b, c) генерише три "суседна" решења (a', b, c) (a, b', c) (a, b, c') при чему важе једнакости:

a' = 3bc – a   b' = 3ac – b   c' = 3ab – c.[57]

<u>ПРИМЕР 6.</u> *Ако су у решењу (a, b, c) једначине Маркова две координате једнаке онда и само онда је решење сингуларно. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако је решење сингуларно доказ је очигледан, јер су и у тројци (1, 1, 1) и у тројци (2, 1, 1) две координате једнаке.

Ако је решење једначине Маркова (a, b, b) онда је $a^2 + b^2 + b^2 = 3ab^2$ или $a^2 = (3a - 2)b^2$. Добија се $9b^2 = \dfrac{9a^2}{3a-2} = 3a + 2 + \dfrac{4}{3a-2}$. Број b ће бити природан, ако је $(3a - 2) \in \{1, 2, 4\}$. Дакле, a = 1 или a = 2. Тада је b = 1. Следи да су тражена решења (1, 1, 1) или (2, 1, 1). Δ

[57] Детаљније о једначини Маркова видети у тексту М.Г. Крейн: Диофантово уравнение А.А. Маркова, Квант, Москва, 1985, број 4, стр. 13 – 16.

<u>*ПРИМЕР 7.*</u> *Ако је решење (a, b, c) несингуларно онда једно од "суседних" решења има максималну координату мању од максималне координате решења (a, b, c) , а два друга "суседна" решења имају максималну координату већу од максималне координате решења (a, b, c). Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако је несингуларно решење једначине Маркова (a, b, c) и ако је $a > b > c$, онда је $(b – a)(b – a') = b^2 – (a + a') b + aa' = b^2 - 3b^2c + b^2 + c^2 = 2b^2 + c^2 - 3b^2c < 3b^2 – 3b^2c = 3b^2(1 – c) < 0$. Како је $b – a$ негативно то је $b – a'$ позитивно, тј. $b > a'$. Следи да је $a > b > a'$, па је максимална координата суседног решења (a', b, c) једнака b, мања од максималне координате a решења (a, b, c).

Слично је $(a – b)(a – b') = a^2 – (b + b')a + bb' = a^2 – 3a^2c + a^2 + c^2 = 2a^2 + c^2 – 3a^2c < 3a^2 – 3a^2c = 3a^2(1 – c) < 0$. Како је $a - b$ позитивно то је $a – b'$ негативно, па је $b' > a$. Следи да је $b' > a > b$, па је максимална координата суседног решења (a, b', c) једнака b', већа од максималне координате a решења (a, b, c).

Аналогно се доказује да је $c' > a > c$, па је максимална координата суседног решења (a, b, c') једнака c', већа од максималне координате a решења (a, b, c).Δ

<u>*ПРИМЕР 8.*</u> *Свако решење Диофантове једначине Маркова се добија као једно од суседних решења у ланцу који почиње са сингуларним решењем (1, 1, 1).*

РЕШЕЊЕ: Нека је (a, b, c) несингуларно решење једначине Маркова. Тада на основу претходног примера постоји "суседно" решење (a_1, b_1, c_1) чија је максимална координата мања од максималне координате решења (a, b, c). Ако је (a_1, b_1, c_1) несингуларно решење једначине Маркова на основу претходног примера постоји "суседно" решење (a_2, b_2, c_2) чија је максимална координата мања од максималне координате решења (a_1, b_1, c_1).

Ако се процес настави, онда је очигледно да сва добијена несингуларна решења, тј. њихове максималне координате образују опадајући низ природних бројева који очигледно не може бити бесконачан, јер је скуп природних бројева ограничен одоздо. Зато се процес мора зауставити. Нека је $(a_к, b_к, c_к)$ оно решење код кога су координате једнаке. Ако је то тројка (1, 1, 1), онда је доказ завршен. Ако је то (2, 1, 1) онда је "суседно" решење за координату 2 (a', 1, 1), где је $a' = 3bc – a = 3·1·1 – 2 = 1$, па је почетно решење (1, 1, 1) чиме је доказ завршен. Δ

Из претходна два примера јасно је да једначина Маркова има бесконачно много решења која се добијају формирањем ланца решења, тј. генерисањем "суседних" решења, полазећи од основног решења (1, 1, 1).

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

556. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $2x^3 + xy = 7$.

557. Доказати да једначина $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + (x + y)^2$ има бесконачно много целобројних решења.

558. Доказати да једначина $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + z^2$ има бесконачно много целобројних решења.

559. Одредити све троцифрене бројеве који су једнаки кубу збира својих цифара.

560. У скупу целих бројева решити једначину $x^4 - xy^3 = x^2 + y^2 + (x + y)^2$.

561. Доказати да једначина $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + ... + (x + n)^3 = y^3$ (n је природан број) за свако n има решење у скупу целих бројева.

562. Доказати да једначина $x^2 - y^3 = 7$ нема решења у скупу природних бројева.

563. Одредити сва целобројна решења једначине $y^2 = x^3 + (x + 4)^2$.

564. Да ли је број решења једначине $x^2 + y^3 = z^2$ коначан или бесконачан?

565. Доказати да једначина $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$ нема целобројних решења.

566. a) Ако су A, B, C природни бројеви, онда је остатак при дељењу броја $A^2 + B^2 + C^2$ са 3 једнак броју датих бројева који нису дељиви са 3 или 0, ако су сва три дељива са 3. Доказати.

b) Сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ дата су формулама $x = 3A$, $y = 3B$ и $z = 3C$, где су A, B и C решења Диофантове једначине Маркова $A^2 + B^2 + C^2 = 3ABC$. Доказати.

567. a) Ако су A, B, C природни бројеви, онда је остатак при дељењу броја $A^2 + B^2 + C^2$ са 4 једнак броју непарних бројева међу бројевима A, B и C. Доказати.

b) Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ осим тривијалног решења (0, 0, 0) нема других целобројних решења. Доказати.

568. Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ има нетривијалних решења само за к = 1 и к = 3. Доказати.

569. Ако се сума квадрата три природна броја подели њиховим производом, колики је количник?

570. Доказати да су за свако решење једначине Маркова координате у паровима узајамно прости бројеви.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

571. Одредити све основе бројног система мање од 100, тако да је у тим бројевним системима број 2101 потпун квадрат. (СРЈ 1994.)

572. Одредити све природне бројеве a, b и c, такве да је $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$. (5. ЈБМО – Кипар 2001.)

573. У скупу целих бројева решити систем једначина: $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. (Србија 2002.)

574. Одредити све тројке (x, y, z) позитивних рационалних бројева таквих да је $x \le y \le z$ за које су $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ и xyz природни бројеви. (Мала олимпијада 1995.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

575. Дата је једначина $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 2006$. Одредити бар једно решење једначине у скупу природних бројева.

576. Дата је једначина $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$. Доказати да за сваки природан број n дата једначина има бар једно решење у скупу природних бројева.

577. Одредити два решења једначине $x(x + 1) = y(y + 1)(y + 2)$.