12. ИРАЦИОНАЛНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

И код ирационалних Диофантових једначина нећемо се упуштати у посебна теоријска разматарања већ ћемо низом примера илустровати карактеристичне проблемске ситуације везане за ирационалне Диофантове једначине, уз напомену да се при решавању ирационалних Диофантових једначина нарочито мора водити рачуна о домену дефинисаности проблема.

<u>ПРИМЕР 1.</u> *Одредити све природне бројеве a, b и c за које је испуњена једнакост* $\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$.

РЕШЕЊЕ: Како су под коренима позитивне величине, квадрирањем се добија $a + \frac{b}{c} = \frac{a^2 b}{c}$. Добијена једначина је еквивалентна са једначином $ac + b = a^2 b$, односно $c = \frac{b(a-1)(a+1)}{a}$. Како је број a узајамно прост са (a – 1) и (a + 1) то мора бити b = aк (к $\in$ N).

Следи да је $c = к(a^2 - 1)$, па је опште решење проблема дато формулама: $a = t$, $b = kt$; $c = к(t^2 - 1)$ (к, t $\in$ N; t $\neq 1$). Δ

<u>ПРИМЕР 2.</u> *Дата је једначина* $\sqrt{x - \frac{1}{5}} + \sqrt{y - \frac{1}{5}} = \sqrt{5}$. *Одредити целобројна решења дате једначине.*

РЕШЕЊЕ: Множењем дате једначине са $\sqrt{5}$ добија се једнакост $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{5y - 1} = 5$, при чему је $0 \le 5x - 1 \le 25$ и $0 \le 5y - 1 \le 25$. Следи да је: $1 \le x \le 5$ и $1 \le y \le 5$. Ако је $5x - 1 = a^2$ и $5y - 1 = b^2$, онда је $a + b = 5$. Како је $x = \frac{a^2 + 1}{5}$ и $y = \frac{b^2 + 1}{5}$, целобројне вредности x и y добијају се само ако a и b узимају вредности 2 и 3, па су једина решења дате једначине (1, 2) и (2, 1). Δ

<u>ПРИМЕР 3.</u> *Одредити све парове позитивних рационалних бројева x и y за које важи једнакост* $\sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}} = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем полазне једначине добија се еквивалентна једначина $x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy} = 2\sqrt{3} - 3 > 0$, па је $x > y$. Ако се добијена једнакости подели са $\sqrt{3}$ следи да је $x + y - 2\sqrt{xy} = 2 - \sqrt{3}$. Даљом трансформацијом добија се једнакост $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$. Сада је због почетног услова $x > y$, очигледно $x = \frac{3}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$ [58] Δ

ПРИМЕР 4. *Дата је једначина* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2p}$ *, где је p прост број, а x и y природни бројеви. За које вредности p једначина има решење?* [59]

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем се добија да је $x + 2\sqrt{xy} + y = 2p$. Ако је $xy = a^2$, онда је $x + y = 2p - 2a$, па су x и y решења квадратне једначине $t^2 - 2(p-a)t + a^2 = 0$. Да би решења $t_{1,2} = \dfrac{2(p-a) \pm 2\sqrt{(p-a)^2 - a^2}}{2}$ добијене једначине била целобројна, мора дискриминанта $p^2 - 2ap = p(p-2a)$ бити потпун квадрат. Како је p прост број, то важи ако је $p - 2a = pк^2$ ($к \in Z$) тј. ако је $a = \frac{p}{2}(1-к^2)$. Тада је $x = \dfrac{p(к+1)^2}{2}$ и $y = \dfrac{p(к-1)^2}{2}$. Како је $a > 0$, то је $1 - к^2 > 0$, па је $к = 0$. Тада је $x = y = \dfrac{p}{2}$. Једини прост број који је дељив са 2 је $p = 2$. Δ

ПРИМЕР 5. *Одредити природне бројеве x, y и z тако да важи једнакост* $\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}}_{y \text{ корена}} = z$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $y = 1$, онда је $\sqrt{x} = z$, $x = к^2$, $y = 1$, $z = к$ ($к \in N$).

[58] Проблем је са такмичења у Великој Британији 1970. године

[59] Проблем је дат на Републичком такмичењу из математике за ученике средњих школа - Србија 1982. и 27. Московској математичкој олимпијади 1967.

Нека је $y \geq 2$. Претпоставимо да је $x + \sqrt{x} = к^2$ $(к \in N)$. Како је $\sqrt{x} = к^2 - x$ и како су и к и x природни бројеви то је и број $\sqrt{x} = a$ природан број. Међутим, важи и неједнакост $x = (\sqrt{x})^2 < x + \sqrt{x} = к^2 < x + 2\sqrt{x} + 1 < (\sqrt{x} + 1)^2$. Како између квадрата два узастопна природна броја $(\sqrt{x})$ и $(\sqrt{x} + 1)$ нема потпуних квадрата добијена је противуречност, па једначина сем добијених, нема других решења. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

578. Одредити најмање природне бројеве a и b $(b > 1)$ такве да важи једнакост $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$.

579. Ако су x и y природни, а p и q прости бројеви онда једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{pq}$ нема решења. Доказати.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

580. Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y који задовољавају једначину $\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}} = y$ (x се јавља 1964 пута). (4. СРМО - 1964.)

581. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1976}$? (Кијевска МО - 1976.)

582. Колико целобројних решења има једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$? (Србија 1980.)

583. Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y који задовољавају једначину $\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}} = y$ (x се јавља 1992 пута). (Србија 1992.)

584. Решити једначину $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1996}$ у скупу ненегативних целих бројева (СРЈ 1996.)