3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

Решавање Диофантових једначина методом последње цифре заснива се на једноставној чињеници да ако је у једнакости A = B, последња цифра броја A једнака s, онда је и последња цифра броја B такође једнака s. Наравно исти принцип важи и за последње две, три, ..., последњих к цифара.

Интересантно је посматрати последње цифре бројева n^k, a^n, производа неколико узастопних природних бројева, броја n!, ... и добијене резултате искористити за решавање неких Диофантових једначина .

3.1. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА n^k

Последње цифре броја n^k показују извесну законитост која се веома успешно може применити као основа за разликовање случајева приликом разматрања појединих Диофантових једначина.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

109. Природан број n завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }. Одредити којом цифром се у том случају завршавају бројеви n^2, n^3, n^4, ..., n^{16}, n^{17} и попуни наредну таблицу:

Последња цифра броја n →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра броја n^2 →										
Последња цифра броја n^3 →										
Последња цифра броја n^4 →										
Последња цифра броја n5 →										
Последња цифра броја n^6 →										

Последња цифра броја n^6 →										
Последња цифра броја n^7 →										
Последња цифра броја n^8 →										
Последња цифра броја n^9 →										
Последња цифра броја n^{10} →										
Последња цифра броја n^{11} →										
Последња цифра броја n^{12} →										
Последња цифра броја n^{13} →										
Последња цифра броја n^{14} →										
Последња цифра броја n^{15} →										
Последња цифра броја n^{16} →										

110. Доказати да је последња цифра квадрата природних бројева 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

111. Квадрати природних бројева никада се не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8. Доказати.

112. Ако је n природан број, онда је последња цифра броја n^4 једнака 0, 1, 5 или 6. Доказати.

113. Доказати да се четврти степен природног броја никада не завршава цифрама 2, 3, 4, 7, 8, 9.

114. Ако је n природан број, онда је последња цифра броја $n^5 - n$ нула, тј број $n^5 - n$ је дељив са 10. Доказати.

115. За сваки природан број a, бројеви n^a и $n^{4к+a}$ завршавају се истом цифром ($n \in N$, $k \in N$). Доказати.

ПРИМЕР 1. *Користећи наредну таблицу испитај да ли постоје природни бројеви x и y, такви да важи једнакост:* $x^2 + 5y = 1234567$?

РЕШЕЊЕ: Број x^2 се увек завршава цифрама 0, 1, 2, 4, 5, 6 или 9 (прва врста), а број 5y се увек завршава цифрама 0 или 5 (прва колона).

5y ↓	x^2→	0	1	4	5	6	9
0		0	1	4	5	6	9
5		5	6	9	0	1	4

Тада се њихов збир $x^2 + 5y$ увек завршава једном од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9 и никада не завршава цифрама 2, 3, 7 или 8, па је зато немогуће да $x^2 + 5y$ буде једнако са 1234567. Δ

116. Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост: $x^2 + 5y^2 = 333\ 333\ 333$?

117. Направити одговарајућу таблицу и ако је n природан број, одреди која је последња цифра бројева $2n^2$, $4n^2$, $6n^2$, $8n^2$?

118. Искористити наредну таблицу и одредити да ли једначина $5x^2 + 2y^2 = 1999$ има решења у скупу целих бројева?

$5x^2 \downarrow$	$2y^2 \rightarrow$			

ПРИМЕР 2. Одредити да ли једначина $x^4 + y^4 = 123456789$, има решења ако су x и y цели бројеви?

РЕШЕЊЕ: Конструише се таблица чији су елементи последње цифре четвртих степена броја x^4, односно y^4. Како се квадрати целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то се њихови квадрати, тј. четврти степени целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 5 или 6. Упишемо у таблицу последње цифре и онда те последње цифре саберемо, а у таблицу уносимо последњу цифру збира.

$x^4 \downarrow$ $y^4 \rightarrow$	0	1	5	6
0	0	1	5	6
1	1	2	6	7
5	5	6	0	1
6	6	7	1	2

Из таблице је очигледно да се $x^4 + y^4$ може завршавати цифрама 0, 1, 2, 5, 6 или 7 и не може завршавати цифрама 3, 4, 8 и 9. Према томе једначина $x^4 + y^4 = 123456789$ нема решења. Δ

119. Доказати да једначина $x^4 + 3y^4 = 777\ldots777$ (број седмица је n) нема целобројних решења ни за један природан број n.

120. Да ли једначина $x^2 + 4y^4 = 98765432$ има решења у скупу целих бројева?

121. За које вредности једноцифреног природног броја n, једначина $x^4 + 4y^2 = 10к + n$ нема решења у скупу целих бројева (x, y и к $\in$ N)?

122. Постоје ли цели бројеви x, y и z, такви да је $x^4 + y^4 + z^4 = 999\ldots999$ (број деветки је произвољан)?

123. Да ли једначина $3x^4 + 4y^8 + 5z^{16} = 987654321$ има решења у скупу целих бројева?

124. Одреди да ли једначине $x^4 - y^4 = 12345678$ и $x^4 - 2y^4 = 7$ имају решења у скупу целих бројева?

125. Да ли једначина $x^5 - x + y^2 = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

126. Постоје ли цели бројеви x, y и z такви да једначина $x^{24} + y^{20} = z^{16} - z^{12} + 4$ има решења?

127. Да ли једначина $x^7 - x^3 + y^2z^4 = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

128. Ако су x, y и z цели бројеви онда једначина $x^4y^8 - z^5 + z = 2$ нема решења. Доказати.

129. Одредити све једноцифрене бројеве n за које једначина $x^4 + y^5 - y + 5z = n$ има бесконачно много целобројних решења.

3.2. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА a^n

У претходним примерима смо посматрали квадрате, треће степене, ... природних бројева и утврђивали правилност која се може при том уочити. Сада ћемо истраживати последње цифре бројева $\ldots1^n$, $\ldots2^n$, ... , $\ldots9^n$ и опет покушати да уочимо правила која се могу користити за успешно решавање неких класа Диофантових једначина.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

130. Природан број а завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } . Одредити којом цифром се у том случају завршавају бројеви $a^2, a^3, a^4, \dots a^{12}, a^{13}, \dots a^n$ и попуни наредну таблицу водећи рачуна о разним случајевима за природан број n :

Последња цифра броја а	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра броја a^2										
Последња цифра броја a^3										
Последња цифра броја a^4										
Последња цифра броја a^5										
Последња цифра броја a^6										
Последња цифра броја a^7										
Последња цифра броја a^8										
Последња цифра броја a^9										
Последња цифра броја a^{10}										
Последња цифра броја $a^{4к+1}$										
Последња цифра броја $a^{4к+2}$										
Последња цифра броја $a^{4к+3}$										
Последња цифра броја $a^{4к}$										

131. Ако је n природан број, која је последња цифра броја 11^n? Ако су к и n природни бројеви, онда је последња цифра броја $(10к + 1)^n$ једнака 1. Доказати.

132. Која цифра је последња цифра броја 5^{2006}? Ако је n природан број, онда је последња цифра броја 5^n једнака 5. Доказати

133. Ако је n природан број, која је последња цифра броја $6^{4567890n}$? Доказати да је последња цифра броја 6^n једнака 6 за сваки природан број n.

134. Којом цифром се завршава број 4^{4444}? Ако је n паран природан број, онда је последња цифра броја 4^n једнака 6, а ако је n непаран број онда се број 4^n завршава цифром 4. Доказати.

135. Ако је n природан број, која је последња цифра броја $9^{876543210n}$? Доказати да ако је n паран природан број, онда је последња цифра броја 9^n једнака 1, а ако је n непаран број онда се број 9^n завршава цифром 9.

136. Која је последња цифра броја $7^{123456789}$? Којим цифрама се завршавају бројеви облика 7^n

137. Да ли једначина $6^x + 31^y = 123456789$ има решења у скупу природних бројева?

138. Доказати да једначина $99^x - 44^y = 111...111$ нема решења ако су x и y природни бројеви.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Одредити да ли постоје природни бројеви x, y и z, такви да важи једнакост $4^x + 9^y = 11^z$?

РЕШЕЊЕ: Број 4^x се завршава цифрама 4 или 6, а број 9^y цифрама 1 или 9. Према томе збир $4^x + 9^y$ се може завршавати цифрама ...4 + ...1= ...5, ...4 + ...9 = ...3, ...6 + ...1 = ...7 и ...6 + ...9 = ...5. Дакле, $4^x + 9^y$ се завршава цифрама 3, 5 или 7, а 11^z увек цифром 1, што значи да ако су x, y и z, природни бројеви једначина нема решења.

139. Постоји ли природан број n такав да једначина $5^x + 6^y + 7^z = 666…66$ (шестица је тачно n) има решење у скупу природних бројева?

140. Да ли једначина $8{\cdot}5^x + 7{\cdot}6^y + 6{\cdot}7^z = 98765432$ има решење ако су x, y и z природни бројеви?

141. Постоји ли природан број x такав да је $2^x + x^2 = 555\ 555\ 555$.

142. Користећи наредну таблицу одреди да ли постоје природни бројеви x и y, такви да је $x^2 + 5^y = 12345678$?

$5^y \downarrow$	$x^2 \rightarrow$	0	1	4	5	6	9
5							

143. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^4 + 6^y = 876543$?

144. Ако су p, q и r прости бројеви, онда једначина $p^4 + q^4 = r^4$ нема решења. Доказати.

145. Постоји ли природан број n такав да једначина $x^{2000} + 1999^y = 888...888$ (број осмица је n) има решења у скупу целих бројева?

146. Нека је x природан, а p прост број. Доказати да једначина $4^x + p^4 = 9876543$ нема решења.

147. Ако су p, q и r прости бројеви, решити једначину $5p^4 + 6q^4 = 7r^4$.

148. Одредити све једноцифрене бројеве n тако да једначина $x^{64} + 64^y = 10к + n$ има решење у скупу целих бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

149. Одредити све природне бројеве x и све просте бројеве p тако да је $5^x + p^5 = 157$.

150. Ако су p, q и r прости бројеви, онда једначине $p^{4к} + q^{4к} = r^{4к}$ нема решења. Доказати.

151. Дата је једначина $p^{100} + q^{200} + r^{300} = 10k + n$, где су p, q и r прости, а к и n природни бројеви. Одредити једноцифрени број n тако да дата једначина има решење?

3.3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ ПРОИЗВОДА НЕКОЛИКО УЗАСТОПНИХ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

152. Природан број n завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } . Одредити којом цифром се у том случају завршава производ два, три, четири, пет и више узастопних природних бројева и попуни наредну таблицу:

Последња цифра броја n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра n(n +1)										
Последња цифра n(n +1)(n+2)										
Последња цифра (n+1)(n+2)(n+3)										
Последња цифра производа више узастопних целих бројева										

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

153. Које су последње цифре производа два узастопна природна броја?

154. Којим цифрама се никада не завршава производ три узастопна природна броја?

155. Које су последње цифре производа четири узастопна природна броја?

156. Којим цифрама се никада не завршава производ пет узастопних природних бројева?

157. Доказати да је производ два узастопна природна броја дељив са 2, производ три узастопна природна броја је дељив са 6, а производ четири узастопна природна броја дељив са 24.

158. Производ пет узастопних природних бројева је дељив са 120. Доказати.

159. Постоји ли цео број x, такав да важи једнакост $x^2 + x = 987654$?

160. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x(x + 1) + 1998y^{1999} = 1234567$?

161. Да ли једначина $x^2 + y^2 = x - y + 7654321$ има решења у скупу целих бројева?

<u>ПРИМЕР 4.</u> Може ли збир првих n природних бројева бити 444 444 ?

Решење: Нека је 1 + ... + n = 444 444. Тада је $\frac{n(n+1)}{2} = 444\,444$, што значи да је n (n + 1) = 888 888, што није могуће, јер се производ два узастопна броја може завршавати само цифрама 0,1 или 6. Δ

162. Постоји ли природан број n такав да једначина $1 + 2 + 3 + \ldots + x + 5^y = 222\ldots222$ (број двојки је n) има решења у скупу целих бројева?

163. Користећи таблицу испитати да ли једначина $x^4 + y^4 = y^2 + 123456789$ има решења у скупу целих бројева?

$y^2(y^2-1)$ ↓	x^4 →				

164. Да ли постоји цео број x такав да је x(x+1)(x+2) = 98765432?

165. Да ли једначина x(x-1)(x-2) = 4444444444 има целобројних решења?

166. Постоје ли цели бројеви x и y који задовољавају једначину $x^3 - 3x^2 + 2x - 11^y = 234567$?

167. Одредити једноцифрен број n тако да једначина $5x + y^3 + 6y^2 + 11y + 6 = 10к + n$ има решење?

$5x \downarrow$	$y^3 + 6y^2 + 11y + 6 \rightarrow$			

168. Постоји ли цео број x такав да важи једнакост $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 888\ 888\ 888$?

169. Да ли једначина $x(x - 1)(x-2)(x - 3) = 987654$ има целобројних решења?

170. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4^x + y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 987654312$?

171. Одредити једноцифрен број n тако да једначина $x^4 + y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y = 10к + n$ има решење, ако су x, y и к цели бројеви?

172. Ако је $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 1234567890$ онда x није цео број. Доказати.

173. Дата је једначина $x^5 - 5x^3 + 4x + 7^y = 10к + n$, где су x, y и к природни бројеви, а n једноцифрен природан број. Доказати да дата једначина има решење само ако је $n \in \{1, 3, 7, 9\}$.

174. Дата је једначина $x^5 + y^5 + 4x = 5x^3 + y + 1999$. Доказати да дата једначина нема целобројних решења.

175. Којим цифрама се завршава производ два узастопна цела броја исте парности?

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

176. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^3 + 5^y = x + 9876543$?

177. Да ли једначина $x^2 + 2x + 6^y = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

178. Одредити једноцифрени природни број n тако да једначина $1 + 2 + 3 + \ldots + x - 5y = n$ има решења у скупу природних бројева? Колико решења има дата једначина?

179. Испитати за које вредности једноцифреног броај n једначина $x^4 + y^5 - 5y^3 + 4y = 10k + n$ има целобројно решење (x, y и к су цели бројеви)?

3.4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА n!

180. Производ првих n узастопних природних бројева $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots(n-1)n$ зове се n факторијел и обележава се са n!. Израчунати 1! , 2! , 3! , 4! , …, 10! .

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

181. Којом цифром се завршава број n!?

182. За које вредности природног броја n, је број n! непаран?

183. Доказати да је за $n \geq 4$, број n! дељив са 4.

184. Ако је $n \geq 5$, број n! се завршава цифром 0. Доказати.

185. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x! + 2y = 2007$.

ПРИМЕР 5. *Ако су x и y природни бројеви решити једначину* $2x^2 + y! = 969$.

РЕШЕЊЕ: Како је $y! = 969 - 2x^2$ и како је $2x^2$ паран број, то је y! непаран број. Значи да је $y = 1$, па је $2x^2 = 968$. Следи да је $x^2 = 484$ шро значи да је $x = 22$.Δ

186. Да ли једначина $x! + 5^y = 98765432$ има решења у скупу природних бројева?

187. Ако су x и y природни бројеви, решити једначину $6^x - y! = 192$.

188. Одредити природне бројеве x и y такве да је $x! + 5^y = 131$.

189. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x! + y! = 5046$.

190. Решити једначину $x! + 3 = p^2$, ако је x природан, а p прост број.

191. Користећи дату таблицу, одредити да ли постоје природни бројеви x и y такви да једначина $x! + 9^y = 12345678$ има решења?

$9^y \downarrow$	$x! \rightarrow$						

192. Решити једначину $x! + y^2 = 1297$, ако су x и y природни бројеви.

193. Доказати да једначина $x^2 + y! = 333\,333$ нема решења ако су x и y природни бројеви.

194. Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + z! = 999\ldots999$ (999 деветки) ?

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

195. Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + z! = 999\ldots999$ (2006 деветки) ?

196. Одредити све природне бројеве x и y такве да је $x! + y^4 = 10024$.

197. Одредити природне бројеве x и y тако да је $1! + \ldots + x! = y^2$. Колико има решења?

198. Ако су x, y и z природни бројеви, да ли је једначина $x! + 2y^4 + 5^z = 9876543210$ има решења.

2.5. НЕКЕ ПРИМЕНЕ МЕТОДЕ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

199. Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли мерни број површина коцке бити 1998?

200. У равни је дато n тачака од којих никоје три не припадају истој правој. За које n, је датим тачкама одређена 231 права?

201. Може ли конвексан многоугао имати 11111 дијагонала?

202. Постоје ли прости бројеви p, q и r такви да је $2^p + q^4 = r!$?

203. Дато је n тачака у простору, при чему никоје четири тачке не припадају истој равни. Милан је израчунао да дате тачке одређују 5432 равни. Да ли је Миланова рачуница исправна?

204. Словослагач је расуо цифре 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 9. Испоставило се да су то цифре шестог степена природног броја n. Одредити број n.

205. Јанко је сабирао првих n парних природних бројева и добио збир 987 654. Мара је сабрала првих к непарних природних бројева и добила збир 34 567. Да ли су они тачно извршили сабирање?

206. Брат и сестра су Гаусовим поступком рачунали збир првих n природних бројева и добили резултате који су се разликовали само у последњој цифри. Брат је тврдио да је последња цифра 4, а сестра да је последња цифра 8. Ко је био у праву?

207. Одредити природан број n, ако је збир бројева $1 + 2 + 3 + ... + n$ троцифрени природни број чије су све цифре једнаке.

208. Постоји ли двоцифрени природни број који је једнак збиру факторијела својих цифара?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

209. Доказати да број $172^{1980} + 7$ не може бити квадрат целог броја. (Кијевска МО – 1980).

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

210. Постоји ли двоцифрени природни број који је једнак збиру факторијела својих цифара? Одредити све троцифрене природне бројеве који су једнаки збиру факторијела својих цифара.

211. Ако је x природан број одредити да ли је могућа једнакост: $x^8 + (x+1)^8 +...+ (x+99)^8 = 876543210$.

212. Да ли се број облика $10^к – 1$ може приказати као збир факторијела два природна броја?

213. Да ли постоје три узастопна природна броја чији је збир квадрата једнак четвороцифреном броју чије су све цифре једнаке? Да ли постоје три узастопна непарна природна броја чији је збир квадрата једнак четвороцифреном броју чије су све цифре једнаке?