5. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Једначина која садржи само једну променљиву за коју се поставља услов да је целобројна је Диофантова једначина једне променљиве.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одредити све целе бројеве x за које је $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 14 = 0$.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $x = 0$, онда једначина нема решења, јер је $14 \neq 0$.

2) Ако је $x \neq 0$, онда дељењем са x дата једначина се трансформише у следећу: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + \frac{14}{x} = 0$. Како је x цео број и како је десна страна једнакости цео број, то мора бити и лева, а то значи да израз $\frac{14}{x}$ мора бити цео број. Дакле број x мора припадати скупу целобројних делилаца броја 14, па је $x \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2. 7, 14\}$. Провером се добија да је једино $x = 2$ задовољава дату једначину. Δ

Проблем се може коришћењем идентичне идеје уопштити на било коју Диофантову једначину једне променљиве која је дата у облику полинома.[17]

<u>ТЕОРЕМА 1.</u> Ако је x_o целобројна нула полинома $P(x) = a_nx^n + ...+ a_1x + a_o$ са целобројним коефицијентима ($a_n \neq 0$), онда је x_o један од целобројних делилаца броја a_o.

ДОКАЗ: Ако је x_o нула полинома $P(x) = a_nx^n + ...+ a_1x + a_o$ и ако је x_o цео број, онда је $P(x_o) = a_nx_o^n + ...+ a_1x_o + a_o = 0$.

Ако је $a_o = 0$, онда је $P(x_o) = x_o(a_nx_o^{n-1} + ...+ a_2x_o + a_1)$, па је једна нула полинома $x_o = 0$.

Ако је $a_o \neq 0$, онда је и $x_o \neq 0$, па је једначина $P(x_o) = a_nx_o^n + ...+ a_1x_o + a_o = 0$ еквивалентна са $a_n x^{n-1} + ...+ a_1 + \frac{a_o}{x} = 0$. Како је десна страна једначине цео број и како су сви сдабирци на левој страни целобројни, то мора бити и $\frac{a_o}{x}$. Дакле x је један од целобројних делилаца броја a_o.

[17] Viet (1540-1603) је у својим радовима доказао општу теорему и објаснио алгоритам за одређивање рационалних нула полинома с целобројним коефицијентима. Видети: Војислав Андрић: Рационалне нуле полинома – МФЛ, број , стр. 113-116, Загреб 1985.

ПРИМЕР 2. Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени цео број к. Тада је $к^3 + (к + 1)^3 + (к + 2)^3 = (к + 3)^3$. Сређивањем добијене једначине добија се $к^3 – 6к - 9 = 0$.[18]

Трансформацијом израза $к^3 – 6к – 9 = к^3 – 27 – 6к + 18 = (к – 3)(к^2 + 3к + 9) – 6(к – 3) = (к – 3)(к^2 + 3к + 3)$, добија се као једино решење број к = 3, јер једначина $к^2 + 3к + 3$ нема целобројних решења. Према томе тражена релација је $3^3+4^3+5^3 = 6^3$.Δ[19]

ПРИМЕР 3. Може ли збир кубова првих n узастопних природних бројева бити a) 1 234 567; b) 29 506 624?

РЕШЕЊЕ: а) Познато је да је је $1^3 + 2^3 + (n - 1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Дакле, збир кубова првих n узастопних бројева је потпун квадрат. Како број 1 234 567 није потпун квадрат, јер се ниједан квадрат не завршава цифром 7, одговор је негативан.

b) Ако је $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ = 29 506 624, онда је $\frac{n(n+1)}{2}$ = 5432. Тада је производ n(n + 1) = 10 864, а то није могуће, јер се производ два узастопна цела броја завршава цифрама 0, 2 или 6 и никада не завршава цифром 4. Δ

ПРИМЕР 4. Одредити све просте бројеве p ако је $p^2 + 2^p = 177$.

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да су функције $y = p^2$ и $y = 2^p$ растуће, па је и цео израз $p^2 + 2^p$ растући. Како је p непаран број и $2^p < 177 < 256 = 2^8$, то је $p < 8$. Дакле, p је 3, 5 или 7. Провером се лако добија да је p = 7, јер је $2^p + p^2 = 49 + 128 = 177$. Δ

ПРИМЕР 5. Збир квадрата првих n природних бројева је 4900. Колико је бројева сабрано?

РЕШЕЊЕ: Како је $1^2 + 2^2 + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ = 4900, то је производ $n(n+1)(2n+1) = 6 \cdot 4900 = 6 \cdot 100 \cdot 49 = 6 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 49 = 24 \cdot 25 \cdot 49$. Очигледно је n = 24. Δ

---

[18] И ова једначина се може решити коришћењем теореме о рационалним нулама полинома.

[19] Видети пример 7. у претходном поглављу.

Занимљиво је да је збир квадрата првих 24 природна броја потпун квадрат броја 70.. Поставља се питање да ли таквих случајева има и касније у низу природних бројева, тј. постоји ли још неки природан број n такав да је $1^2 + 2^2 + ... + (n - 1)^2 + n^2 = к^2$?[20]

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

434. Разлика збира кубова првих n парних бројева и збира кубова првих n непарних бројева је 2240. Одредити n.

435. Одредити цео број x, тако да је $3^x + 5^x = 152$.

436. Постоји ли пет узастопних целих бројева таквих да је збир кубова прва четири броја једнак кубу петог броја?

437. Одредити три узастопна цела броја са особином да када се четвртом степену првог броја дода други број, онда се добије куб трећег броја.

438. Одредити све целе бројеве x, тако да важи једнакост $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 + (x + 4)^3 = (x + 10)^3$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

439. Доказати да куб највећег од три узастопна цела броја не може бити једнак суми кубова преостала два броја. (Мађарска 1909.)

440. У скупу природних бројева решити једначину $x^{5-x} = (6 – x)^{1-x}$. (СФРЈ 1980.)

441. Нека су p и q непарни цели бројеви. Одредити сва целобројна решења једначине $x^{2000} + px^{1999} + q = 0$. (Србија 2000.)

442. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења. (Србија 2004.)

443. Одредити све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 – px^3 + q = 0$ има целобројна решења. (Србија 2004.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

444. Постоје ли природни бројеви n и к такви да је збир квадрата првих n природних бројева потпун квадрат: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = к^2$? Да ли таквих бројева има коначно или бесконачно много?

---

[20] О овом проблему ће бити још речи у поглављу о Пеловој једначини.