7. ЈЕДНОСТАВНИЈЕ КВАДРАТНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

7.1. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $xy = n$ $(n \in N)$

Диофантова једначина xy = n ($n \in N$) има увек решења у скупу природних (а и целих) бројева и њено решавање није проблем, јер се своди на одређивање свих чинилаца броја n. Зато ће се ово разматрање односити на одређивање броја решења једначине xy = n ($n \in N$), јер се модел одређивања броја решења већине једначина заснива на моделу пребројавања броја решења управо ове једначине.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Колико решења (x, y) има једначина $xy = p^n$, ако су x, y и n природни, а p прост број.*

РЕШЕЊЕ: Једини делиоци броја p^n су 1, p, p^2, p^3, ... , p^n па дата једначина има n + 1 решење, јер x узима све вредности од 1 до p^n, а y вредности $\frac{p^n}{x}$. Δ

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Ако је n = $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ канонски облик природног броја онда је број решења једначине Диофантове једначине xy = n у скупу природних бројева $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$.*

РЕШЕЊЕ: Број x може бити ма који делилац природног броја n. Како n има тачно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$ делилаца то једначина xy = n, у скупу природних бројева има $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$ решења. ◊

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Одредити најмањи природан број n, тако да једначина xy = n има 10 решења.*

РЕШЕЊЕ: Како је $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 10$, то постоји неколико могућности:

1) $\alpha_1 + 1 = 10$, $\alpha_2 + 1 = \alpha_3 + 1 = \ldots = \alpha_k + 1 = 1$. Тада је $n = 2^9 = 512$.

2) $\alpha_1 + 1 = 5$, $\alpha_2 + 1 = 2$, $\alpha_3 + 1 = \ldots = \alpha_k + 1 = 1$. Тада је $n = 2^4 \cdot 3 = 48$.

3) $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 5$, $\alpha_3 + 1 = ... = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 2\cdot 3^4 = 162$.

4) $\alpha_1 + 1 = 1$, $\alpha_2 + 1 = 10$, $\alpha_3 + 1 = ... = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 3^9$.

Најмањи такав природан број је n = 48.

<u>ПРИМЕР 4.</u> Колико уређених тројки (x, y, z) природних бројева x, y и z задовољава једначину xyz = 12.

РЕШЕЊЕ: Ако је x = 1, онда је $yz = 12 = 2^2\cdot 3$, па једначина има $3\cdot 2 = 6$ решења. Ако је x = 2, онда је $yz = 6 = 2\cdot 3$, па једначина има $2\cdot 2 = 4$ решења. У случају x = 3, $yz = 4 = 2^2$, па једначина има 3 решења. Уколико је x = 4 или x = 6, тада је yz = 3 односно yz = 2, па једначина има по 2 решења. И на крају, ако је x = 12, онда је yz = 1, па једначина има 1 решење. Једначина има укупно 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18 решења.

<u>ПРИМЕР 5.</u> Колико решења у скупу природних бројева има једначина $xyz = p^n$, ако је p прост, а n природан број.

РЕШЕЊЕ: Ако је x = 1, онда је $yz = p^n$ и једначина има n + 1 решење. Уколико је x = p, онда је $yz = p^{n-1}$ и једначина има n решење. Ако је $x = p^2$, онда је $yz = p^{n-2}$ и једначина има n - 1 решење, ... Уколико је $x = p^n$, онда је yz = 1 и једначина има 1 решење. Дакле, укупно има 1 + 2 + ... + $n - 1 + n + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ решења.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

474. Колико решења у скупу природних бројева има једначина xy = pq ако су p и q прости бројеви?

475. Колико решења у скупу природних бројева има једначина xyz = pqr ако су p, q и r прости бројеви?

7.2. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - y^2 = n$ $(n \in N)$

Диофантова једначина $x^2 - y^2 = n$, где су x, y и n природни бројеви, је веома интересантна за анализу, јер се за сваки природан број n једначина лако решава коришћењем производа. Међутим, пре општег разматрања броја решења ове једначине, треба погледати неколико конкретних примера.

<u>ПРИМЕР 6.</u> Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : a) $x^2 - y^2 = 24$; b) $x^2 - y^2 = 18$; c) $x^2 - y^2 = 25$.

РЕШЕЊЕ: a) Како је $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 24 = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6$ и како су бројеви x - y и x + y исте парности, то у обзир долазе само комбинације x + y = 12, x – y = 2, или x + y = 6, x – y = 4, па су решења дате једначине (x, y) = (7, 5) или (x, y) = (5, 1).

b) Слично из $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 18 = 1\cdot 18 = 2\cdot 9 = 3\cdot 6$ следи да дата једначина нема решења, јер не постоји ниједна комбинација таква да су бројеви x - y и x + y исте парности.

c) Како је $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 25 = 1\cdot 25 = 5\cdot 5$ и како су бројеви x - y и x + y исте парности, то у обзир долазе комбинација x + y = 25, x – y = 1, или x + y = 5, x – y = 5, па је једино решење дате једначине (x, y) = (13, 12), јер друга комбинација даје решење (x, y) = (5, 0) које не одговара условима задатка, зато што y није природан број.

Ако је канонски облик природног броја $n = 2^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, онда једначина $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = n$ има решења ако су бројеви x + y и x – y исте парности, а то значи оба парна или оба непарна.

Број $n = 2^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ има укупно $S = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_к + 1)$ делилаца, од којих су $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ непарни. Дакле број парних делилаца је $P = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots(\alpha_к + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Шта се дешава са решењима дате једначине за разне вредности броја α_1 најбоље илуструје следећи пример

<u>ПРИМЕР 7.</u> Ако је природан број $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, онда је број решења квадратне Диофантове једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу природних бројева једнак $r = \left[\dfrac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)}{2}\right]$[25].

Доказ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $\alpha_1 = 0$, онда је број n непаран и P = 0, па су сви делиоци броја n непарни и има их тачно N. Тада је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ једнак броју парова (x + y, x – y) а он је једнак половини укупног броја делилаца, јер је x + y > x - y и сваки број x + y има свој комплементаран делилац $\dfrac{n}{x + y} = x - y$.

[25] [x] је ознака за највећи цео број који није већи од броја x.

Како N може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат), то $\frac{N}{2}$ може бити природан број, али и не мора бити. Зато је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у овом случају $r = \left[\frac{N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$, јер када је $x^2 - y^2 = n = m^2$, пар $x + y = x - y = m$ отпада, пошто ће тада вредност y бити 0. Како је $|\alpha_1 - 1| = |0 - 1| = 1$ то је $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$.

2) Ако је $\alpha_1 = 1$, онда је $n = 2(2m + 1)$, тј број n је паран, али није дељив са 4. Тада је $P = N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ и тада, сваки паран делилац има свој комплементаран непаран делилац (и обрнуто). То значи да бројеви $x + y$ и $x - y$ никада нису исте парности, што истовремено значи да једначина $x^2 - y^2 = n$ у овом случају нема решења, тј. $r = 0$. Како је $|\alpha_1 - 1| = |1 - 1| = 0$, то је $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right] = 0$

3) Ако је $\alpha_1 \geq 2$, онда је n број који је дељив са 4 и број парних делилаца $P = \alpha_1(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_к+ 1)$ је веће од $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Тада сваки непаран делилац има свој комплементарни парни делилац и у тим случајевима једначина $x^2 - y^2 = n$ нема решења, јер су бројеви $x + y$ и $x - y$ различите парности. Једначина има решења само када су бројеви $x + y$ и $x - y$ оба парни. Таквих делилаца има $P - N = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Број решења је једнак броју парова $(x + y, x - y)$ који су исте парности (оба парна). Тада је $r = \left[\frac{P-N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$, при чему се цео део узима јер и у овом случају број делилаца $\frac{P-N}{2}$ може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат). Како је α_1 веће од 1, то је $\alpha_1 - 1 = |\alpha_1 - 1|$, па је број решења дате једначине $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$. ◊

Следећи пример показује како формула дата у претходној теореми. "ради" за разне случајеве.

<u>ПРИМЕР 8.</u> *Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : a) $x^2 - y^2 = 45$; b) $x^2 - y^2 = 225$; c) $x^2 - y^2 = 34$.*

РЕШЕЊЕ: a) Како је $45 = 2^0 3^2 5^1$, то је број решења једначине $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)\cdot(1+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 2}{2}\right] = 3$.

b) Како је $225 = 2^0 3^2 5^2$, то је број решења $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)(2+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 3}{2}\right] = 4$.

c) Како је $34 = 2^1 17^1$, то је број решења $r = \left[\frac{|1-1|(1+1)}{2}\right] = 0$.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

476. Ако је к природан број, онда једначина $x^2 - y^2 = 2^к$, има $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ решења у скупу природних бројева.

477. Ако је p непаран прост број, онда једначина $x^2 - y^2 = p$, има само једно решење у скупу природних бројева. Доказати.

478. Одредити природан број n, тако да једначине $x^2 - y^2 = 2^n$ има 2006 решења у скупу природних бројева.

479. Постоји ли природан број n, такав да једначина $x^2 - y^2 = 36^n$ има 49 решења у скупу природних бројева.

480. Доказати да једначина $x^2 - y^2 = 7^n$ има за сваки природан број n, више решења него једначина $x^2 - y^2 = 2^n$.

481. Одредити природан број n, тако да једначине $x^2 - y^2 = 200$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имају једнак број решења у скупу природних бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

482. Ако је p непаран прост број, онда једначина $x^2 - y^2 = p^к$, где је к неки природан број, има $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ решења у скупу природних бројева. Доказати.

483. Ако је канонски облик броја $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ онда је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева $r = 2\left|\alpha_1 - 1\right|(\alpha_2 + 1)\cdot ... \cdot(\alpha_k + 1)$.

484. Број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева је увек паран број. Доказати.

7.3. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = n$ $(n \in N)$

Код једначине $x^2 + y^2 = n$ није могуће, као код претходна два типа једначина експлицитно извести формулу за одређивање броја решења, али у ери рачунара за то вероватно и нема потребе. Ако једначина $x^2 + y^2 = n$ у скупу целих бројева има решење, број решења је коначан, јер је $|x| \le \sqrt{n}$ и $|y| \le \sqrt{n}$. Зато је код ове једначине већа потреба утврђивање егзистенције решења, јер се елиминацијом оних једначина које немају решења у многоме посао олакшава.

Анализом неколико првих природних бројева ($1^2 + 0^2 = 1$, $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 0^2 = 4$, $2^2 + 1^2 = 5$, $2^2 + 2^2 = 8$, $3^2 + 0^2 = 9$, $3^2 + 1^2 = 10$, $3^2 + 2^2 = 13$, …), уочава се да једначина има решења за неке вредности броја n који је облика 4к, 4к + 1, 4к + 2. Међутим, једначине $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 11$ ... у опште $x^2 + y^2 = n = 4к + 3$ немају решење, јер израз $x^2 + y^2$ при дељењу са 4 може имати само остатке 0, 1, 2. Зато се може формулисати следеће тврђење:

<u>*ПРИМЕР 9.*</u> *Ако је $n = 4k + 3$ (к $\in$ Z), онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Како је 4к + 3 непаран број, то је један од бројева x и y паран, а други непаран. Нека је $x = 2m$, а $y = 2p + 1$. Тада је $x^2 + y^2 = 4m^2 + 4p^2 + 4p + 1 = 4к + 3$. Следи да је $4(m^2 + p^2 + p) = 4к + 2$. Како је лева страна једнакости дељива са 4, а десна није, то једначина нема решења. ◊

Међутим, може се доказати и општије тврђење.

<u>*ПРИМЕР 10.*</u> *Ако је $n = 2^к(4m + 3)$, онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева, при чему су к и m ненегативни цели бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $к = 0$, онда се проблем своди на пример 112.

2) Ако је $к = 1$, онда је $x^2 + y^2 = n = 8m + 6$, па су x и y или оба парна или оба непарна. Ако су оба парна, онда је збир њихових квадрата дељив са 4, што у овом случају очигледно није. Ако су оба непарна онда је $x = 2p + 1$, а $y = 2q + 1$, па је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 8m + 6$. Следи да је $4(p^2 + p + q^2 + q) = 8m + 4$, а дељењем са 4 се добија $p(p + 1) + q(q + 1) = 2m + 1$. Како је лева страна једнакости парна (због збира производа по два узастопна броја), а десна непарна, то једначина нема решења.

3) Ако је $к \geq 2$ онда се сменом $x = 2^{[к/2]} a$, $y = 2^{[к/2]}b$ (a и b су природни бројеви) једначина своди на један од претходна два случаја (први, ако је к паран и други случај ако је к непаран број). ◊

Дакле, сада се зна да једначина $x^2 + y^2 = n$ за $n \in \{3, 7, 11, \dots 6, 14, 22, \dots 12, 28, 44, 60, \dots\}$, тј za $n = 2^k(4m + 3)$ $(k \in N_o, m \in N)$ нема решења у скупу целих бројева.

Како бројева облика $2^k(4m + 3)$ $(k \in N_o, m \in N)$ има бесконачно, без доказа се може констатовати да је непосредна последица претходног разматрања:

<u>ПРИМЕР 11.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева.

Међутим, важно је испитати и да ли и када дата једначина има решења.

<u>ПРИМЕР 12.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Ако је $n = 25к^2$ $(к \in N)$, онда је $x = 3к$, $y = 4к$ једно решење једначине $x^2 + y^2 = 25к^2$, чиме је доказ завршен. ◊

Међутим, могу се извести и општији докази. На пример, ако је $n = к^2$ $(к \in N, к \geq 5)$ онда се добија "Питагорина" једначина $x^2 + y^2 = к^2$, па су њена решења $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $k = p^2 + q^2$ $(p > q ; (p,q) = 1$; p и q су различите парности), о чему ће ускоро бити речи.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

485. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

486. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

487. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 1 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

488. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 1 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

489. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

490. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

491. Доказати да једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ ($n \in N$) имају једнак број решења у скупу целих бројева.

7.4. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = n$ ($n \in N$)

Једначина овог облика је већ била предмет разматрања.[26] Из примера 36. следи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = n$ нема решења ако је n облика 8к – 1, тј. ниједан природан број облика 8к – 1 се не може приказати као збир квадрата три цела броја.

Остаје да се прикаже један од могућих начина за решавања Диофантове једначине $x^2 + y^2 + z^2 = n$ ($n \neq 8к – 1$).

<u>ПРИМЕР 13.</u> Одредити целе бројеве x, y, z такве да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2005$.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су два од тражених бројева x, y, z парни, а трећи непаран. Нека је x = 2a, y = 2b и z = 2z + 1. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 2005$. Даљом трансформацијом добија се $a^2 + b^2 + c(c + 1) = 501$. Како је c(c + 1) паран број, то a^2+b^2 мора бити непаран број, па је један од бројева a и b паран, а други непаран. Дакле, a = 2d и b = 2e + 1, па се добија једнакост $4d^2 + 4e^2 + 4e + c(c + 1) = 500$. Очигледно је да c(c + 1) мора бити дељиво са 4.

Доња таблица приказује могуће вредности за c(c + 1) и a^2+b^2. Као потенцијална решења елиминишемо вредности c(c + 1) које нису дељиве са 4 (коментар 1) и вредности a^2+b^2 које као фактор имају број облика 4к+3 на непарном степену (коментар 2):

[26] Видети примере 30. и 37.

c	c(c+1)	a^2+b^2	Ком. 1	Ком. 2
0	0	501	-	-
1	2	499	-	
2	6	495	-	
3	12	489	+	-
4	20	481	+	$20^2 + 9^2$
5	30	471	-	-
6	42	459	-	-
7	56	445	+	$21^2 + 2^2$
8	72	429	+	-
9	90	411	-	-
10	110	391	-	
11	132	369	+	$12^2 +15^2$
12	156	345	+	-
13	182	319	-	
14	210	291	-	-
15	240	261	+	-
16	272	229	+	$15^2 + 2^2$
17	306	195	-	-
18	342	159	-	-
19	380	121	+	$11^2 + 0^2$
20	420	81	+	$9^2 + 0^2$
21	462	39	-	-

Из табеле је јасно да дата једначина има 6 решења у скупу целих ненегативних бројева. При том свако решење, због симетричности једначине, подразумева и све пермутације добијених бројева. То значи да наредна таблица садржи само почетну пермутацију, а да се остале због учињене напомене подразумевају:

a	b	c	x	y	z	$x^2 + y^2 + z^2$
20	9	4	40	18	9	1600 + 324 + 81 = 2005
21	2	7	42	4	15	1764 + 16 + 225 = 2005
15	12	11	30	24	23	900 + 576 + 529 = 2005
15	2	16	30	4	33	900 + 16 + 1089 = 2005
11	0	19	22	0	39	484 + 0 + 1521 = 2005
9	0	20	18	0	41	324 + 0 + 1681 = 2005

Може се запазити да су међу добијеним решењима и једина два решења једначине $x^2 + y^2 = 2005$ ((22, 39), (18, 41)), као и да се прво решење једначине $40^2 + 9^2 + 18^2 = 41^2 + 18^2 = 2005$ у ствари трансформише из решења (18, 41).

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

492. Да ли једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2006$ има решења у скупу целих бројева?.

493. Доказати да једначина $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2007$ има решење у скупу целих бројева?

494. Доказати да за сваки природан број n постоје природни бројеви x, y и z такви да је $x^2 + y^2 – z^2 = n$.

7.5. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ $(n \in N, n \geq 4)$

Француски математичар Лагранж[27] је доказао да се сваки природан број n може приказати као збир квадрата четири цела броја,[28] тј. да Диофантова једначина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$ има решење за сваки природан број n.[29]

Дакле, остаје да се одређују конкретне репрезентације сваког природног броја у виду збира четири квадрата и пребројава колико таквих репрезентација постоји.

ПРИМЕР 14. *Број 2005 приказати као збир квадрата четири цела броја на бар један од могућих начина.*

РЕШЕЊЕ: Из претходног примера може се направити неколико таквих репрезентација, без амбиције да су то и све репрезентације, при чему се репрезентације не праве додавањем нула:

---

[27] Лагранж - J. L. Lagrange (1736 – 1813)

[28] Доказ ове Лагранжове теореме видети у [7.142.] - стр. 70-72.

[29] У вези са овим треба поменути и Варингов проблем који је формулисан 1770. године, којим је постављена хипотеза да се сваки природан број може написати као збир 4 квадрата, збир 9 кубова, 12 бројева четвртог степена... (Edvard Waring 1734-1798, енглески математичар)

- $40^2 + 18^2 + 9^2 = 24^2 + 32^2 + 18^2 + 9^2 = 2005$;
- $42^2 + 4^2 + 15^2 = 42^2 + 4^2 + 12^2 + 8^2 = 2005$;

Следећих неколико четворки нису изведене из претходног примера:

- $44^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 2005$;
- $38^2 + 23^2 + 6^2 + 6^2 = 2005$.

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ (к $\in$N) је за к > 4, са аспекта решивости, мање атрактивна за истраживање, али би било интересантно истражити да ли постоји и каква је законитост расподеле броја решења дате једначине зависно од броја n, као и броја сабирака к.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

495. Број 981 приказати у облику збира четири квадрата.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

496. Одредити сва разлагања броја 2001 у облику збира 1997 квадрата природних бројева (СФРЈ 1979.)

497. Доказати да постоји бесконачно много тројки узастопних природних бројева од којих је сваки збир два потпуна квадрата. (пример $72 = 6^2 + 6^2$; $73 = 8^2 + 3^2$; $74 = 5^2 + 7^2$) (СФРЈ 1986.)