8. ПИТАГОРИНА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = z^2$

Један од најзанимљивијих проблема теорије бројева свакако је проблем Питагориних бројева, тј. питање решења Питагорине Диофантове једначине.

Питагориним бројевима или Питагориним тројкама (x, y; z) називају се природни бројеви x, y и z који задовољавају Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$.

Троугао чији су мерни бројеви страница x, y и z природни бројеви који задовољавају релацију $x^2 + y^2 = z^2$ назива се Питагорин троугао.[30]

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и тројка (y, x; z) Питагорина тројка.*

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да ако важи да је $x^2 + y^2 = z^2$, онда важи и $y^2 + x^2 = z^2$, што значи да ако је (x, y ; z) Питагорина тројка онда је и (y, x; z) такође Питагорина тројка. Δ

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и (кx, кy; кz) такође Питагорина тројка (к је природан број).*

РЕШЕЊЕ: Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је $x^2 + y^2 = z^2$, али је онда и $к^2x^2 + к^2y^2 = к^2z^2$, што значи да је и $(кx)^2 + (кy)^2 = (кz)^2$. Дакле, (кx, кy; кz) је Питагорина тројка. Δ

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Питагориних тројки има бесконачно много.*

РЕШЕЊЕ: Како се за сваки природна број к од Питагорине тројке (x, y; z) може добити Питагорина тројка (кx, кy; кz), јасно је да свака Питагорина тројка генерише бесконачно много нових Питагориних тројки. Δ

Питагортина тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако су природни бројеви x, y и z узајамно прости.

Тако су Питагорине тројке (3, 4; 5), (12, 5, 13) и (20, 21, 29) основне, а (12, 16, 20), (24, 10, 26) и (40, 42, 58) изведене, јер су добијене од основних множењем са 4, односно са 2.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда су x и y природни бројеви различите парности.*

---

[30] На основу Питагорине теореме такав троугао је правоугли. Зато убудуће кад кажемо страница троугла, онда мислимо на њену дужину и неименујемо мерну јединицу, већ само мерни број

ДОКАЗ: Ако су x и y парни бројеви онда је $x = 2a$ и $y = 2b$ ($a, b \in N$). Тада је $NZD(x, y) = NZD(2a, 2b) = 2$. То значи да x и y нису узајамно прости јер имају заједнички делилац већи од 1, па ова могућност отпада.

Ако су $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$ ($a, b \in N$) непарни бројеви онда је z паран број, $z = 2c$ ($c \in N$), па се из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, добија $(2a+1)^2 + (2b+1)^2 = (2c)^2$ или $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2$. Како је са десне стране једнакости број који је дељив са 4, а са леве стране број који при дељењу са 4 даје остатак 2, то једнакост није могућа.

Дакле, x и y не могу бити исте парности. Δ

Из претходних примера следи:

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда је z непаран природан број.*

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако и само ако постоје природни бројеви m и n такви да је* $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$ *и* $z = m^2 + n^2$, *при чему је* $m > n$, $NZD(m, n) = 1$ *и m и n су различите парности.*

РЕШЕЊЕ: Нека је x паран, а y и z непарни чланови основне Питагорине тројке (x, y; z). Из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, следи да је $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Бројеви $z + y = 2a$ и $z - y = 2b$ су парни, па је $x^2 = 4ab$.

Треба доказати да су a и b узајамно прости. Ако се претпостави супротно, тј. да a и b имају заједнички делилац d, онда је $z + y = kd$ и $z - y = ld$. Тада је $2z = d(к + l)$, а $2y = d(k - l)$, па y и z нису узајмно прости, што је у супротности са претпоставком да је (x, y; z) основна Питагорина тројка.

Како су a и b узајамно прости, да би $x^2 = 4ab$ био потпун квадрат мора бити $a = m^2$ и $b = n^2$. Тада је $x^2 = 4m^2n^2$, па је $x = 2mn$. Слично је $z + y = 2m^2$ и $z - y = 2n^2$, тј. $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

Да би y био природан број мора бити $m^2 > n^2$, тј. $m > n$. Бројеви m и n морају бити узајамно прости, јер ако би имали заједнички делилац, онда би тај делилац био заједнички и за x, y и z. И на крају m и n морају бити различите парности јер би у супротном x, y и z били парни и имали заједнички делилац 2.

Треба још доказ извести у другом смеру тј. да $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, јесу елементи Питагорине тројке. Како је $x^2 + y^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$.

Бројеви x, y и z су узајамно прости, јер када би имали заједнички делилац, онда би он био заједнички делилац и за m и n, што није могуће, јер су m и n узајамно прости. Δ

Претходни пример јасно доказује да ако m и n испуњавају задате услове, онда се добија основна Питагорина тројка. На пример ако је m = 3, а n = 2, онда је x = 12, y = 5 и z = 13. Међутим, важно је напоменути да ако m и n не испуњавају дате услове, опет се добија Питагорина тројка, али она није основна. Тако се за m = 4 и n = 2 добија x = 16, y = 12 и z = 20.

Следећа табела показује како добијено опште решење Питагорине једначине генерише неке основне и изведене Питагорине тројке:

		Основне Питагорине тројке			Изведене Питагорине тројке					
					к = 2			к = 3		
m	n	x	y	z	x	y	z	x	y	z
2	1	4	3	5	8	6	10	12	9	15
3	2	12	5	13	24	10	26	36	15	39
4	1	8	15	17	16	30	34	24	45	51
4	3	24	7	25	48	14	50	72	21	75
5	2	20	21	29	40	42	58	60	63	87
5	4	40	9	41	80	18	82	120	27	123
6	1	12	35	37	24	70	74	36	105	111
6	5	60	11	61	120	22	122	180	33	183
7	2	28	45	53	56	90	106	84	135	159
7	4	56	33	65	112	66	130	168	99	195
7	6	84	13	85	168	26	170	252	39	255
8	1	16	63	65	32	126	130	48	189	195

Претходна теорема се може доказати и на друге начине. Наводимо још два доказа основне теореме о Питагориним бројевима, без доказа за релације између параметара m и n, који се може извести аналогно.

8.1. ДИОФАНТОВ ДОКАЗ

Нека је дата једначина $x^2 + y^2 = z^2$. Тада је $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$. Ако се уведе смена $a = \frac{y}{z}$ и $b = \frac{x}{z}$ једначина постаје $a^2 + b^2 = 1$. На добијену једначину се сада примени Диофантов метод.[31] Како је (-1, 0) једно решење добијене једначине следи да је: $a = -1 + mt$ и $b = nt$ (m и n су неки природни бројеви).

Тада је $(mt - 1)^2 + (nt)^2 = 1$, па је $1 - 2m + m^2t^2 + n^2t^2 = 1$. Из ове једнакости се израчунава $t = \frac{2m}{m^2 + n^2}$, а одговарајуће вредности за a и b су: $a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ и $b = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$. Ако се врати првобитна смена, добије се $x = 2кmn$, $y = к(m^2 - n^2)$ и $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$. Δ

8.2. АЛГЕБАРСКИ ДОКАЗ[32]

Из $x^2 + y^2 = z^2$ следи $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Ако се од ове релације формира пропорција $\frac{x}{z - y} = \frac{z + y}{x} = \frac{m}{n}$ (m и n су неки природни бројеви), налазимо да је $z + y = \frac{mx}{n}$ и $z - y = \frac{nx}{m}$. Решавањем претходног система једначина по z и y добија се $\frac{z}{x} = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$ и $\frac{y}{x} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$. Тада је $x = 2кmn$, $y = к(m^2 - n^2)$, $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$. Δ

Примери који следе су задаци које је Диофант Александријски решавао у својој "Аритметици", додуше у нешто модификованој форми.

---

[31] Видети Диофант: Аритметика, стр. 217

[32] Видети Борис Павковић – Диофантове једнаџбе, ДММ "Питагора", Бели Манастир, 1988, стр. 14.

ПРИМЕР 7. *Одредити све Питагорине троуглове код којих је једна страница једнака 12.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $x = 2mn = 12$, онда је:

1.1) $m = 6$, $n = 1$ и $x = 12$, $y = 35$, $z = 37$;

1.2) $m = 3$, $n = 2$ и $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$;

2) Ако је $y = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 12$, онда је $m + n = 6$, а $m - n = 2$. Тада је $m = 4$ и $n = 2$, па је $x = 16$, $y = 12$ и $z = 20$.

3) Ако је $z = m^2 + n^2 = 12$, онда је јасно да не постоје природни бројеви m и n чији збир квадрата је 12, па су три претходно добијене Питагорине тројке једина решења. Δ

ПРИМЕР 8. *Доказати да постоји бесконачно много правоуглих троуглова код којих је хипотенуза за 1 већа од дуже катете.*

РЕШЕЊЕ: Како су y и z непарни бројеви, то они не могу бити и узастопни. Према томе $x + 1 = z$ или $2mn + 1 = m^2 + n^2$. Следи да је $m^2 + n^2 - 2mn = 1$, па је $(m - n)^2 = 1$. Дакле, $m = n + 1$, па све основне Питагорине троуглове код којих је хипотенуза за један већа од катете генеришу једнакости: $x = 2n(n + 1)$, $y = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, $z = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

498. Одредити све Питагорине троуглове код којих је једна од страница једнака 2006.

499. Ако је (x, y, z) основна Питагорина тројка, онда је x увек дељиво са 4, y је непаран број већи од 1, а z је облика $4к + 1$. Доказати.

500. Да ли постоји основна Питагорина тројка чији је елемент број 30? Да ли постоји Питагорина тројка чији је елемент број 30?

501. Ако је к природан број већи од 2, онда увек постоји Питагорина тројка чији је елеменат број к. Доказати. Да ли тврђење важи и за основне Питагорине тројке?

502. Доказати да су мерни број обима и површине Питагориних троуглова парних бројева.

503. Одредити све Питагорине троуглове чији мерни број обима је једнак мерном броју површине.

504. Постоји ли Питагорин троугао чија је површина једнака: a) 78; b) 120?

505. Одредити Питагорин троугао чији је обим: a) 88; b) 84.

506. Колико има Питагориних троуглова код којих је мерни број површине 4 пута већи од мерног броја обима?

507. Постоје ли Питагорине тројке (x, y, z) тако да бројеви x, y и z чине: a) аритметичку прогресију; b) геометријску прогресију?

508. Одредити све Питагорине троуглове код којих је: a) разлика; b) збир хипотенузе и сваке од катета потпун куб. (Диофант: Аритметика – књига 6, задатак 1. и задатак 2.)

509. Одредити бар један Питагорин троугао чији је обим потпун куб.

510. Ивице квадра су a = 12 и b = 5. Одредити трећу ивицу квадра c тако да су и ивица c и дијагонала квадра D природни бројеви.

511. Доказати да једначина $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева, тј. доказати да Питагориних четворки има бесконачно много.

512. Доказати да Питагориних петорки има бесконачно много.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

513. Ако су a, b и c цели бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, онда је бар један од бројева a и b дељив са 3. Доказати. (Србија 1971.)

514. Нека су a, b и c природни бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$. Доказати да је број abc дељив са 60. (СФРЈ 1977.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

515. Да ли постоји Питагорин троугао чији је обим 2006?

516. Постоји ли Питагорин троугао чији је обим потпун квадрат. Колико таквих троуглова има?

517. Да ли постоји Питагорин троугао чија је површина потпун квадрат?

518. Да ли постоје Питагорине n-торке (n је природан број већи од 5)?

519. Проучити проблеме из шесте књиге Диофантове аритметике.

8.3. ХЕРОНОВИ ТРОУГЛОВИ

Теорија Питагориних бројева омогућује да се каже нека реч и о Хероновим троугловима.

Хероновим троугловима називају се сви они троуглови чији су мерни бројеви страница природни бројеви и чији је мерни број површине такође природан број (даље у тексту се увек мисли на мерне бројеве).

Тако троугао чије су странице 13, 14, 15 има површину 84 и Херонов је, а троугао чије су странице 10, 15 и 20 није Херонов, јер је његова површина ирационалан број.

ПРИМЕР 9. Сви Питагорини троуглови истовремено су и Херо-нови.

РЕШЕЊЕ: Површина Питагориног троугла је $P = mn(m^2 - n^2)$ и како су m и n природни бројеви, то је и површина природан број, што значи да су сви Питагорини троуглови истовремено и Херонови.Δ

Обрнуто тврђење на важи. Сви Херонови троуглови нису Питагорини, а контра пример је Херонов троугао чије су странице 13, 14 и 15.

ПРИМЕР 10. Постоји бесконачно много Хероновых троуглова.

РЕШЕЊА: Како су сви Питагорини троуглови Херонови и како Питагориних троуглова има бесконачно много то је јасно да и Хероновых троуглова има бесконачно много.Δ

ПРИМЕР 11. Ако се "слепе" два Питагорина троугла који имају једнаку бар једну катету, добија се Херонов троугао.

РЕШЕЊЕ: Нека су (x, y, z) (x, y\`, z\`) два основна Питагорина троугла са заједничком катетом x. Слепљивањем троуглова дуж заједничке катете x добија се троугао чије су странице y + y\`, z и z\`. Страници y + y\` одговара висина x. Разликују се два случаја:

1) Ако је x = 2к паран број, онда је површина троугла природан број к(y + y\`).

2) Ако је x = 2к +1 непаран, онда су y и y\` парни па је и y + y\` такође паран број, што значи да је површина троугла $\frac{(2k+1)(y+y`)}{2}$ природан број. Δ

Херонов троугао који није правоугли, а чије су све странице различите, назива се прави Херонов троугао.

<u>*ПРИМЕР 12.*</u> *Колико има Херонових троуглова чија је једна висина 20?*

РЕШЕЊЕ: Висина дели троугао на два правоугла троугла. Ако је у правоуглом троуглу једна катета 20, онда је $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 400$, где је z хипотенуза, а y друга катета у том троуглу. Како су x+y и x-y увек исте парности то су могући једино случајеви $(z - y)(z + y) = 2\cdot200 = 4\cdot100 = 8\cdot50 = 10\cdot40$, па таквих Питагориних троуглова има 4: (20, 99, 101), (20, 48, 52), (20, 21, 29) и (20, 15, 25). "Слепљивањем" ових правоуглих троуглова дуж катете једнаке 20 добија се десет Херонових троуглови: (101, 101, 198); (52, 101, 147); (29, 101, 120); (25, 101, 114); (52, 52, 96); (29, 52, 69); (25, 52, 63); (29, 29, 42); (25, 29, 36); (30, 25, 25). Δ

<u>*ПРИМЕР 13.*</u> *Одредити бар један прави Херонов троугао код кога су и полупречник описаног и полупречник уписаног круга природни бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Троугао чије странице су задате формулама 13к, 14к и 15к има обим 2s = 42к и површину $P = 84к^2$.

Полупречник уписаног круга је $r = \frac{P}{s} = \frac{84k^2}{21k} = 4k$, а полупречник описаног круга је $R = \frac{abc}{4P} = \frac{13k \cdot 14k \cdot 15k}{4 \cdot 84k^2} = \frac{65k}{8}$. За к = 8, добија се Херонов троугао чије су странице 104, 112 и 120, површина 5376, полупречник уписаног круга 32, а полупречник описаног круга 65. Δ

<u>*ПРИМЕР 14.*</u> *Формулама $a = 4m^2 + n^2$; $b = 2m^2 + 2n^2$; $c = 6m^2 - 3n^2$ (m и n су природни бројеви такви да је $m > n$) дефинисана је једна класа Херонових троуглова. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако се дуж катете 4mn "слепе" два Питагорина троугла чије су странице $(4mn, 2m^2 - 2n^2, 2m^2 + 2n^2)$ и $(4mn, 4m^2 - n^2, 4m^2 + n^2)$, онда су странице добијеног Хероновог троугла $(4m^2 + n^2, 2m^2 + 2n^2, 4m^2 - n^2 + 2m^2 - 2n^2 = 6m^2 - 3n^2)$. Δ

Добијена формула генерише бесконачно много Херонових троуглова. Међутим, она није једина која "производи" Херонове троуглове, јер се сличним слепљивањима могу добити и друге формуле које генеришу Херонове троуглове.

Очигледно је да постоје и Херонови четвороуглови, а то су они четвороуглови који имају све странице целобројне и чија је површина цео број. Такав је четвороугао чије су странице 7, 24, 20, 15 који је добијен "слепљивљњем" Питагориних троуглова (7, 24, 25) и (20, 15, 25) дуж хипотенузе 25.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

519. Не постоји једнакостраничан нити једнакокраки Херонов троугао. Доказати.

520. Конструиши бар један Херонов троугао чија је: а) једна од висина једнака 10; b) једна од страница једнака 10.

521. Одредити странице бар једног правог Хероновог троугла чије висине нису цели бројеви.

522. Одредити све Херонове четвороуглове чија је једна страница 12.

523. Доказати да постоји бесконачно много Херонових четвороуглова.

524. Постоји ли Херонов петоугао?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

525. Доказати да постоји бесконачно много неподударних троуглова T таквих да:

- дужине страница a, b и c троугла T су узајамно прости природни бројеви;
- површина P троугла T је цео број;
- ниједна од висина троугла T није цео број. (8. БМО - 1991.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

526. Троуглови чије су странице (3, 4, 5); (13, 14, 15); (51, 52, 53) су Херонови. Да ли је број Херонових троуглова чије су странице узастопни природни бројеви коначан или бесконачан?

527. Конструиши бар једну формулу која генерише бесконачно много Херонових четвороуглова.

528. Постоји ли Херонов тетраедар, тј. тетраедар чије су ивице природни бројеви, а површина и запремина тетраедра такође природни бројеви?