9. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - py^2 = 1$

Међу Диофантовим једначинама за које постоји алгоритам за њихово решавање својом занимљивошћу се истиче једначина облика $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није квадрат ниједног целог броја. Једначина облика $x^2 - py^2 = 1$ у математичкој литератури се најчешће среће под називом Пелова једначина,[33] али није много мање распрострањен ни термин Фермаова једначина.[34] Међутим, познато је да су се том једначином интензивно бавили и Архимед, Диофант, Баскара, Лагранж, Валис, Ојлер, Гаус, ...

У осврту на еволуцију идеја које су кроз историју пратиле Диофантове једначине већ је било говора о Пеловој једначини и спору који постоји око њеног назива. Било је говора и о двема најважнијим чињеницама за њено решавање: о томе да Пелова једначина има бесконачно много решења, што је доказао Лагранж[35], и о начину одређивања такозваног основног решења, које је захваљујући моћима савремене рачунарске технологије све мањи проблем.

Пелова једначина има облик $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није потпун квадрат. Услов да p није потпун квадрат је неопхо-дан, јер у супротном једначина, сем тривијалног $(x_o, y_o) = (1, 0)$ нема других решења.

У расветљавању алгоритма за решавање Пелове једначине могуће је више приступа, али су најуобичајнија два: геометријски и алгебарски. Могућ је и трећи, историјски приступ, који се заснива на примени Диофантовог метода (алгоритма).

9.1. АЛГЕБАРСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Из $x^2 - py^2 = 1$, следи релација $(x - y\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = 1$. Ова релација је врло употребљива за степеновање и остале алгебарске трансформације.

Претпоставимо да поред тривијалног постоји и једно нетривијално решење, на пример (x_1, y_1). Ако је (x_1, y_1) једно нетривијално решење дате једначине, онда је $(x_1 - y_1\sqrt{p})(x_1 + y_1\sqrt{p}) = 1$.

33 John Pell (1610 – 1685. г.), енглески математичар

34 Ferma (Piere Fermat 1601-1665. г.), француски математичар

35 Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813. г.), француски математичар

Нека је (x_n, y_n) уређени пар природних бројева који задовољава релацију $x^2 - py^2 = 1$. Степеновањем дате једнакости са n добијају се нове релације $(x_1 - y_1\sqrt{p})^n(x_1 + y_1\sqrt{p})^n = (x_n - y_n\sqrt{p})(x_n + y_n\sqrt{p}) = 1$. Најмање од таквих решења (прецизније оно решење код којег је $x_1 + y_1\sqrt{p}$ најмање) назива се основним решењем. Оно што није сасвим тривијално је да се докаже да ако је (x_e, y_e) основно решење, тада су претходним поступком описана сва решења Пелове једначине.[36]

"Када је основно решење познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из релације $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_e + y_e\sqrt{p})$ следи нова релација: $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = x_n x_e + p y_n y_e + \sqrt{p}(y_n x_e + y_e x_n)$.

Изједначавањем рационалних и ирационалних делова једнакости добијају се рекуретне везе:

$$x_{n+1} = x_e\, x_n + p\, y_e\, y_n$$

$$y_{n+1} = y_e\, x_n + x_e\, y_n.$$

Низови (x_n) и (y_n) задовољавају претходно добијен систем диференцних једначина, уз почетне услове: (x_o, y_o) = (1, 0). Из добијеног система диференцних једначина низови (x_n) и (y_n) се одређују рекурентно.

Могуће је извести и формуле за директно одређивање низова (x_n) и (y_n), при чему тражене формуле наводимо без одговарајућег доказа:[37]

$$x_n = \frac{1}{2}\left((x_e + y_e\sqrt{p})^n + (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left((x_e + y_e\sqrt{p})^n - (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right).$$

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одредити опште решење једначине $x^2 - 3y^2 = 1$.

---

[36] Доказ ове чињенице видети у: Мићић, Владимир, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева – ДМС, Београд, 2004.

[37] Доказ је елементаран и може се извести директно из релације $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_e + y_e\sqrt{p})^n$ или решавањем добијеног система диференцних једначина

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $(x_0, y_0) = (1, 0)$, а основно решење $(x_e, y_e) = (7, 4)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулама:

$$x_{n+1} = 7x_n + 12y_n, \quad y_{n+1} = 4x_n + 7y_n.$$

а нека од решења једначине дата су таблицом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	1	7	97	1351	262087	3650401	50843527	708158977
y_n	0	4	56	780	151316	2107560	29354524	408855776

9.2. ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Пелова једначина $x^2 - py^2 = 1$ $(p \neq n^2)$ у Декартовој координатној равни дефинише хиперболу. Посматрајмо само њену позитивну полуграну. Очигледно је да уређени пар (1, 0) представља тривијално решење дате једначине, а тачка (1, 0) представља тачку хиперболе чије су обе координате целобројне. Нека је $(1, 0) = (x_0, y_0)$ и нека је (x_1, y_1); (x_2, y_2); ... (x_n, y_n) ... низ тачака које припадају датој хиперболи, а чије су обе координате целобројне.

Ако поред тачке (x_0, y_0), тј. тривијалног решења знамо још једно нетривијално решење, например (x_1, y_1), онда је могуће одредити трансформацију која ће генеристи и остала решења дате једначине. Та трансформација се може исказати следећим рекурентним формулама:

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$

$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

Бројеви a, b, c и d су целобројни коефицијенти које треба одредити тако да добијена трансформација дату хиперболу пресликава у саму себе.

Како је $x_1 = ax_0 + by_0$ и $y_1 = cx_0 + dy_0$, и како је $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$, то је очигледно $a = x_1$ и $c = y_1$. Дакле трансформација сада има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + by_n$$

$$y_{n+1} = y_1x_n + dy_n.$$

Због $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = 1$, следи да је $(x_1x_n + by_n)^2 - p(y_1x_n + dy_n)^2 = 1$. Одавде се квадрирањем добија $x_n^2(x_1^2 - py_1^2) + 2x_ny_n(bx_1 - pdy_1) - y_n^2(kd^2 - b^2) = 1$. Како се траженом трансформацијом дата хипербола пресликава у саму себе, то је и $x_n^2 - py_n^2 = 1$, па због $x_1^2 - py_1^2 = 1$ закључујемо да је $bx_1 - pdy_1 = 0$ и $kd^2 - b^2 = p$. Решавањем добијеног система једначина по траженим коефицијентима b и d добијају се њихове вредности: $b = py_1$ и $d = x_1$.

Коначно тражена трансформација има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + py_1y_n$$

$$y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n.$$

Очигледно је $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = (x_1x_n + py_1y_n)^2 - k(y_1x_n + x_1y_n)^2 = x_n^2(x_1^2 - py_1^2) + 2x_n\, y_n(kx_1y_1 - py_1x_1) - py_n^2(x_1^2 - py_1^2) = x_n^2 - py_n^2 = 1$, што је доказ да добијене рекурентне формуле задовољавају дату једначину.

Очигледно је и дата трансформација линеарна и њена детерминанта је

$$\begin{vmatrix} x_1 & ky_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 - py_1^2 = 1.$$

То значи да је добијена трансформација унимодуларна, што обезбеђује да је добијено пресликавање бијективно, а то опет значи, да ако постоји бар једно нетривијално целобројно решење Пелове једначине $x^2 - py^2 = 1$, онда се добијеном рекурентном формулом може произвести бесконачно много целобројних решења.

Међутим, одређивање основног решења је и само озбиљан проблем. У неким случајевима то може бити једноставно:

1) Ако је $p = a^2 - 1$, онда је $x^2 - py^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Следи да је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$, па је основно решење $(x_e, y_e) = (a, 1)$.

2) Ако је $p = a^2 + 1$, онда је $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$. Тада је $x^2 = a^2y^2 + y^2 + 1$. Да би $a^2y^2 + y^2 + 1$ био потпун квадрат треба да је $y^2 = 2ay$, па је $y = 2a$, а $x = ay + 1 = 2a^2 + 1$. Значи да је $(x_e, y_e) = (2a^2 + 1, 2a)$.

3) Ако једначина $x^2 - ay^2 = 1$, има решење (може бити, а не мора бити основно) $(x_к, y_к)$, онда једначина $x^2 - 4ay^2 = 1$, има решење $(x_к, y_к/2)$, јер из $x_к^2 - ay_к^2 = 1 = x^2 - 4ay^2$, следи $x = x_к$ и $4y^2 = y_к^2$. На пример основно решење за Пелову једначину $x^2 - 5y^2 = 1$ је (9, 4), а на основу тога се добија основно решење за $x^2 - 20y^2 = 1$ и оно је (9, 2).

3.1) Слична релација се може добити и ако се посматрају Пелове једначине $x^2 - ay^2 = 1$ и $x^2 - 9ay^2 = 1$, јер ће свако решење $(x_к, y_к)$ прве једначине генерисати основно решење $(x_к, \frac{y_к}{3})$ друге једначине. Пример: ако је $p = 7$, онда је $x_e = 8$, $y_e = 7$. Следи за $p = 7 \cdot 9 = 63$, $x_e = 8$, $y_e = 1$.

На основу ове три олакшице и нумеричких истраживања Пелове једначине могуће је формирати таблицу основних решења за првих четрдесетак природних вредности коефицијената p у Пеловој једначини $x^2 - py^2 = 1$:

p	x_e	y_e	p	x_e	y_e	p	x_e	y_e
2	3	2	17	33	8	30	11	2
3	2	1	18	17	4	31	1520	273
5	9	4	19	170	39	32	17	3
6	5	2	20	9	2	33	23	4
7	8	3	21	21	55	34	35	6
8	3	1	22	197	42	35	6	1
10	19	6	23	24	5	37	73	12
11	10	3	24	5	1	38	37	6
12	7	2	26	51	10	39	25	4
13	649	180	27	26	5	40	19	3
14	15	4	28	127	24	41	2049	320
15	4	1	29	9801	1820	42	13	2

9.3. ЈЕДНАЧИНЕ ПЕЛОВОГ ТИПА

Под једначинама Пеловог типа подразумевају се једначине облика $x^2 - py^2 = a$, где је p природан број који није потпун квадрат и a цео број различит од 0.

Дакле, поставља се питање да ли постоји алгоритам за решавања једначине $x^2 - py^2 = a$?

Нека је је (x_o, y_o) једно решење, а (x_n, y_n) опште решење једначине $x^2 - py^2 = a$ у скупу природних бројева и нека је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 - py^2 =1$. Тада важе релације:

$$x^2 - py^2 = (x + y\sqrt{p})(x - y\sqrt{p}) = a$$

$$x_n^2 - py_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) = a$$

$$x_e^2 - py_e^2 = = (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = 1.$$

Из датих релација је

$$(x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) =$$

$$(x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = a.$$

Тада је очигледно $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_o + y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n$, што даје могућност за одређивање свих решења (x_n, y_n) једначине $x^2 - py^2 = a$, ако су позната основна решења (x_e, y_e) једначине $x^2 - py^2 = 1$ и (x_o, y_o) једначине $x^2 - py^2 = a$.

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Одредити опште решење једначине $x^2 - 2y^2 = -1$.*

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (7, 5)$, а основно решење Пелове једначине $x^2 - 2y^2 = 1$ је $(x_e, y_e) = (3, 2)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулом:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})n = (7 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n. \Delta$$

Алгоритам за одређивање тривијалних решења једначина Пеловог типа даје и следећи пример који наводимо без доказа: [38]

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Ако једначина $x^2 - py^2 = a$ има бар једно решење, онда постоје цео број n и решење (x_o, y_o) дате једначине, за које важи:* $y_o^2 \le \dfrac{ay_e^2}{2(x_e+1)}$ *ако је* $a > 0$ *и* $y_o^2 \le \dfrac{-ay_e^2}{2(x_e+1)}$ *ако је* $a < 0$, *такви да је*

$$x_n + y_n\sqrt{p} = \pm(x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})^n.$$

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Одредити сва решења једначине $x^2 - 5y^2 = 44$ у скупу целих бројева.*

[38] Доказ ове чињенице може се видети у књизи Мићић Владимир, Каделбур Зоран, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије, Београд, 2004,стр. 92 – 93.

РЕШЕЊЕ: Одговарајућа Пелове једначине је $x^2 - 5y^2 = 1$ и њено основно решење је $(x_e, y_e) = (9, 4)$. Применом претходне теореме добија се $y_o{}^2 \le \frac{44 \cdot 4^2}{2(9+1)} = 35{,}2$. То значи да је потенцијално $y_o \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Провером се добија да условима задатка одговарају решења дате једначине $(x_0, y_0) \in \{ (\pm 7, \pm 1);\ (\pm 8, \pm 2);\ (\pm 13, \pm 5) \}$.

Тада су сва решења дате једначине у скупу целих бројева дефинисана формулама:

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \begin{cases} \pm(7 \pm \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(8 \pm 2\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(13 \pm 5\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \end{cases} \qquad \text{где је n цео број. } \Delta$$

9.4. ПРИМЕНА ЈЕДНАЧИНА ПЕЛОВОГ ТИПА

Примери примене једначина Пеловог типа су многобројни, не само на решавање конкретних једначина Пеловог типа и једначина које се на њих своде, већ и на мноштво веома интересантних Диофантових проблема.

__ПРИМЕР 5.__ За дати природни број n одредити један пар (x, y)природних бројева за које важи $x^2 - 2y^2 = 1993^n$. [39]

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1993^n$ и како важи релација $(45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n = 1993^n$ јасно је да за бројеве x и y важи једнакост $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = (45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n$. Дакле $x + y\sqrt{2} = (45 + 4\sqrt{2})^n$, па је

$$x = 45^n + \binom{n}{2} 45^{n-2}(4\sqrt{2})^2 + \binom{n}{4} 45^{n-4}(4\sqrt{2})^4 + \ldots$$

$$y = \binom{n}{1} 45^{n-1} \cdot 4 + \binom{n}{3} 45^{n-3} \cdot 4^3 \cdot 2 + \binom{n}{5} 45^{n-5} \cdot 4^5 \cdot 2^2 + \ldots$$

---

[39] Видети задатке са Мале олимпијаде у СФРЈ 1993. г.

Очигледно је да се за сваки природан број n добија један пар природних бројева (x, y).

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Одредити три узастопна природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени природни бројеви $y - 1$, y и $y + 1$. Из услова задатка следи да је $(y – 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 = x^2$. Следи да је $x^2 = 3y^2 + 2$. Како не постоји природан број x чији квадрат при дељењу са 3 даје остатак 2, то једначина нема решења. Δ

Овај пример показује да постоје Диофантове једначине Пеловог типа, као што је претходна $x^2 – 3y^2 = 2$, које немају решења. Следећи задатак указује на једну класу једначина Пеловог типа које имају решења.

<u>*ПРИМЕР 7.*</u> *Ако је p прост број облика 4к + 1, онда једначина $x^2 – py^2 = - 1$ увек има целобројна решења.*

РЕШЕЊЕ: Нека је (x_e, y_e) основно, дакле најмање нетривијално решење једна-чине $x^2 – py^2 = 1$. Тада је $x_e^2 = py_e^2 + 1$. Ако је x_e паран број, онда је број $(4к+1)y_e^2 \equiv - 1 \pmod 4$ што је немогуће, па је очигледно x_e непаран број. Тада су $x_e – 1$ и $x_e + 1$, два узастопна парна броја, па је $D(x_e – 1, x_e + 1) = 2$. Како је $(x_e – 1)(x_e + 1) = py_e^2$, то је један од бројева $x_e – 1$ и $x_e + 1$ облика $2a^2$, а други облика $2pb^2$ (a и b су цели бројеви).

Претпоставимо да је $x_e + 1 = 2a^2$ и $x_e – 1 = 2pb^2$. Тада је $2a^2 - 2pb^2 = 2$, па је $a^2 – pb^2 = 1$. Значи да је (a, b) једно нетривијално решење Пелове једначине $x^2 – py^2 = 1$. Из $(x_e + 1)(x_e – 1) = 2a^2 \cdot 2pb^2 = py_e^2$, следује да је $y_e = 2ab$.

Очигледно је $a < x_e$ и $b < y_e$, што је противуречност са претпоставком да је (x_e, y_e) најмање решење Пелове једначине. Значи да је $x_e - 1 = 2a^2$ и $x_e + 1 = 2pb^2$. Одузимањем друге од прве једнакости добија се $2a^2 – 2pb^2 = -2$, односно $a^2 - pb^2 = - 1$, па једначина $x^2 – py^2 = - 1$ има решење (a, b), што је и требало доказати. Δ

<u>*ПРИМЕР 8.*</u> *Одредити све правоугле троуглове код којих су мерни бројеви катета разликују за 1. Да ли таквих троуглова има коначно или бесконачно много?*

РЕШЕЊЕ: Из Питагорине једначине је познато да је постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$ и $y = m^2 – n^2$. Очигледно је да постоје две могућности: $2mn = m^2 – n^2 - 1$ или $2mn = m^2 – n^2 + 1$.

1) Ако је $m^2 - n^2 - 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = 1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = 1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = 1$.

2) Ако је $m^2 - n^2 + 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = -1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = -1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = -1$.

Очигледно је да таквих троуглова има бесконачно много, а преглед првих неколико решења једне и друге једначине дајемо у следећој табели:

$a^2 - 2b^2 = 1$						
a	B	m	n	x	y	z
3	2	5	2	20	21	29
17	12	29	12	696	697	985
99	70	169	70	23660	23661	33461
577	408	985	408	803760	803761	1136689
3363	2378	5741	2378	27304196	27304197	38613965
$a^2 - 2b^2 = -1$						
1	1	2	1	4	3	5
7	5	12	5	120	119	169
41	29	70	29	4060	4059	5741
239	169	408	169	137904	137903	195025
1393	985	2378	985	4684660	4684659	6625109

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

529. Ако су x и y природни бројеви одредити опште решење једначине $x^2 - 14y^2 = 1$.

530. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4x^2 - 7y^2 = 1$.

531. У скупу целих бројева решити једначину $3x^2 - 2y^2 = 1$.

532. Одредити целе бројеве x и y тако да је $x^2 + y^2 + 1 = 4xy$.

533. Доказати да за сваки природан број m постоји бесконачно много парова (x,y) целих бројева таквих да је $x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1$.

534. Доказати да постоји бесконачно много бројевних система у којима је број (210) потпун квадрат. Одредити два бројевна система која имају најмању основу.

535. Ако и само ако је x члан Фибоначијевог низа, онда је један од бројева $5x^2 + 4$ или $5x^2 - 4$ потпун квадрат. Доказати.

536. Ако су m и n природни бројеви и $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$, онда је m потпун квадрат. Доказати.

537. Троугаони бројеви су бројеви 1, 3, 6, 10, 15, 21 ... дакле они бројеви који представљају збир првих n узастопних природних бројева. Одредити све потпуне квадрате који су истовремено и троугаони бројеви. Да ли таквих троугаоних бројева има коначно или бесконачно много?

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

538. Испитати да ли правих Херонових троуглова код којих су странице узастопни природни бројеви има коначно или бесконачно много?

539. Постоје ли природни бројеви n и к такав да је збир квадрата првих n природних бројева потпун квадрат: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = к^2$? Да ли таквих бројева има коначно или бесконачно много?

540. Очигледно је $8^3 - 7^3 = 169 = (2^2 + 3^2)^2$. Доказатаи да ако су x, y и z природни бројеви, онда једначина $(x + 1)^3 - x^3 = (y^2 + z^2)^2$ има бесконачно много решења.