ВОЈИСЛАВ АНДРИЋ

МАЛА ЗБИРКА ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

ВАЉЕВО, 2006

1. УВОД

1.1. ПОЈАМ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

"У једној земљи Далеког истока живео је некад један краљ, који је сваке ноћи узимао нову жену и следећег јутра наређивао да је погубе. После неког времена људи су постали смртно уплашени, јер је долазио ред и на њихове кћери да по једну ноћ буду краљице. Тада Шехерезада, кћер краљевог саветника, која је била мудра као и њен отац, замоли оца да и она постане краљева жена и да са собом као пратиљу поведе своју сестру. Њен отац је био запањен таквом молбом, али је знао да је његова кћер толико мудра да би могла учинити крај том страшном краљевом понашању. И тако се његова кћер Шехерезада венчала са краљем.

После вечере Шехерезада је замолила краља да се опрости са својом сестром. Када је Шехерезадина сестра ушла, затражила је да јој Шехерезада исприча једну од њених прелепих бајки. Шехерезада је почела да прича једну бајку, а када је завршила, краљ је био толико усхићен, да је хтео да чује још једну причу. Тако је Шехерезада из ноћи у ноћ – 1001 ноћ причала краљу по три или пет бајки. У међувремену је краљ заволео Шехерезаду, поштедео јој живот, а она му је подарила троје деце".

Тако су настале чувене бајке из хиљаду и једне ноћи, али и древни математички проблеми:

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Колико би ноћи било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку ако би у току неких ноћи причала по 5 бајки, а у току осталих ноћи по 3 бајке ?*

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Колико највише, а колико најмање ноћи је било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку, причајући по 3, односно 5 бајки за једну ноћ ?*

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *На колико различитих начина је Шехерезада могла да исприча 1001 бајку, уз услов да неких дана прича по 3, а неких дана по 5 бајки ?*

Ако се број дана у којима је Шехерезада причала по 3 бајке означи са x, а број дана у којима је Шехерезада причала по 5 бајки са y, онда се проблеми 1, 2. и 3. могу моделирати једначином

$$3x + 5y = 1001.$$

Очигледно је да су бројеви x и y ненегативни цели бројеви, јер број дана не може бити ни рационалан, ни негативан.

Решење проблема 1, 2. и 3. се тада своди на следећа питања:

- Да ли је уопште могуће решити дату једначину и ако јесте како то урадити, а ако није, како доказати да једначина нема решења ?
- Одредити “најмање”, односно “највеће” решење дате једначине ?
- Колико укупно решења има дата једначина ?

Анализу заслужује и следећи проблем:

<u>ПРИМЕР 4.</u> Постоји ли квадар чији су мерни бројеви ивица цели бројеви, а дијагонала квадра је 65 cm ?

Ако се ивице тог квадра обележе са a, b и c, онда се коришћењем Питагорине теореме добија да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 65^2 = 4225.$$

Опет је из услова задатка јасно да су тражени бројеви a, b и c природни, али се опет намећу и следећа питања:

- Да ли такав квадар уопште постоји ?
- Ако постоји колике су његове ивице и како их израчунати ?
- Да ли постоји само један или више таквих квадара ?

<u>ПРИМЕР 5.</u> Оловка кошта пола динара, гумица један динар, а свеска 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 предмета?

Ако број оловки означи са x, број гумица са y и број свески са z, онда се добија следећи систем једначина:

$$x + y + z = 100$$
$$\frac{1}{2}x + y + 5z = 100.$$

Добијене једначине су примери Диофантових једначина [1].

Дакле, алгебарске једначине или системи алгебарских једначина са рационалним коефицијентима чија решења припадају скупу целих (или рационалних) бројева, или неком од његових подскупова називају се алгебарским Диофантовим једначинама.

[1] Диофант Александријски је последњи велики антички математичар и 3. века нове ере, а први који се систематично бавио једначинама са целобројним решењима.

Прва од наведених једначина је линеарна Диофантова једначина са две променљиве. Друга једначина је квадратна Диофантова једначина са три променљиве, а трећа је систем од две линеарне Диофантове једначине са три променљиве.

Обично се претпоставља да Диофантова једначина има две или више променљивих, а да систем Диофантових једначина има више непознатих него једначина.

Међутим, следећи примери ће показати егзистенцију и неких других врста Диофантових једначина и проблема:

ПРИМЕР 6. *Одредити четири узастопна природна броја таква да је збир кубова прва три броја једнак четвртом.*

Очигледно се ради о једначини $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3$ која јесте Диофантова, али са једном променљивом.

ПРИМЕР 7. *Решити једначину $x^2 + 1 = 2^y$ ако су x и y природни бројеви.*

Дата једначина јесте Диофантова али није алгебарска, већ експоненцијална, јер се непозната у налази у експоненту.

Уопштено, формулом $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ целобројне (или рационалне) променљиве, n природан број и Φ функција[2] датих променљивих, дефинисана је једна Диофантова једначина.

Домен ове Диофантове једначине је скуп Z^n (или Q^n ако се ради о рационалним променљивим).

Решење Диофантове једначине $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, је свака уређена n – торка целих (или рационалних) бројева $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ која задовољава једнакост: $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Ако је $\alpha_1 = f_1(p, q, r, ...)$, $\alpha_2 = f_2(p, q, r, ...)$, …, $\alpha_n = f_n(p, q, r, ...)$ (p, q, r, ... су целобројни параметри) онда је $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ опште решење дате једначине.

ПРИМЕР 8. *Ако су x и y цели бројеви колико решења имају следеће једначине: a) $x^2 + y^2 = 3$; b) $x^2 + y^2 = 5$; c) $x^2 + 2y = 24$.*

[2] Најчешће је та функција алгебарска са рационалним коефицијентима , па се говори о алгебарским Диофантовим једначинама. Међутим, нису ретке ни експоненцијалне Диофантове једначине као и једначине које су задате формулом $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где је Φ нека сложена функција.

Очигледно је да прва једначина нема целобројних решења, јер не постоје цели бројеви чији је збир квадрата 3.

Друга једначина има четири решења: (2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1).

Како је у трећој једначини $x^2 = 24 - 2y = 2(12 - y)$, то x мора бити паран број, тј. $x = 2k$, где је k неки цео број. Тада је $4k^2 = 24 - 2y$, па је $y = 12 - k^2$.

Формулама $x = 2k$, $y = 12 - 2k^2$ тада је дато опште решење једначине, и јасно је да за свако k из скупа целих бројева добијамо уређени пар $(x, y) = (2k, 12 - 2k^2)$ као решење једначине, што значи да једначина има бесконачно много решења.

Закључак је да Диофантове једначине могу бити без решења, а ако решења једначине постоје, онда их може бити коначно или бесконачно много.

На основу претходних примера и разматрања очигледно је да су основна питања везана за Диофантове једначине:

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговори на ова питања су често веома тешки, што теорији Диофантових једначина даје веома велики значај и чини је једном од најинтересантнијих у елементарној математици. Строга систематизација метода за решавање Диофантових једначина сигурно не би била потпуна, јер се општи поступак може конструисати само за неке класе једначина.

Међутим, присутна је изузетно велика разноврсност идеја које се користе у разрешавању наведених питања. Зато ће се у редовима који следе покушати са систематским излагањем неких, до сада познатих, идеја за решавање Диофантових једначина чиме ће се проблематика решавања Диофантових једначина у извесној и могућој мери ипак на неки начин систематски посматрати.

1. 2. МЕТОД РАЗЛИКОВАЊА СЛУЧАЈЕВА [3]

Метод разликовања случајева је један од најексплоатисанијих метода за решавање математичких проблема. У теорији Диофантових једначина он није свемогућ, али је сигурно најчешће коришћен, било самостално, било у комбинацији са другим методама. Зато метод, пре извесног уопштавања, треба илустровати са неколико примера који се односе на Диофантове једначине.

<u>ПРИМЕР 9.</u> Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, тако да је $p^2 + q = 101$. [4]

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја :

1) Ако је $p = 2$, онда је $q = 99 – 4 = 97 \in P$.

2) Ако је $p \geq 3$, онда је p непаран број, па је $q = 101 – p^2$ паран број, што значи да је $q = 2$, јер је 2 једини паран прост број. Тада је $p^2 = 99$, па у овом случају нема решења.

Дакле, једино решења проблема је (2, 97). Δ[5]

<u>ПРИМЕР 10.</u> Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је $xy – 3x + 2y = 7$?

РЕШЕЊЕ: Ако се једначина напише у облику $xy – 3x + 2y – 6 = 1$, онда се растављањем леве стране једнакости на чиниоце добија еквивалентна једначина $(x + 2)(y – 3) = 1$. Како производ два броја $(x + 2)$ и $(y – 3)$ м0же бити 1, само ако су оба 1 или оба –1, разликују се два случаја :

1) $x + 2 = 1$ и $y – 3 = 1$, тј. $x = -1$ и $y = 4$;
2) $x + 2 = - 1$ и $y – 3 = - 1$, тј $x = - 3$ и $y = 2$. Δ

<u>ПРИМЕР 11.</u> Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи једнакост $xy^2 + 4 = 2006\,y$.

[3] Детаљније о методу разликовања случајева видети у чланцима:
1) др Марица Д. Прешић: Метода доказивања разликовањем случајева – “Математика” бр 3/79, Загреб, 1979.
2) Војислав Андрић: Решавање проблема методом разликовања случајева – “Математика” бр 3/81, Загреб, 1981.

[4] Скуп природних бројева у раду је обележен са N, а скуп целих бројева са Z. Скуп простихбројева у раду је обележен са P, а скуп сложених бројева са S.

[5] Крај доказа теореме означен је увек са ◊ , а крај решеног примера са Δ .

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $y = 0$, онда је $4 = 0$, па $y = 0$ није решење дате једначине;

2) Ако је $y \neq 0$, онда је $xy - \frac{4}{y} = 2000$ или $xy - 2000 = \frac{4}{y}$. Како су x и y природни бројеви, то је $xy - 2000$ цео број, па је и $\frac{4}{y}$ цео број. Закључак је да y мора бити делилац броја 4 и зато су могући једино случајеви:

2.1) Ако је $y = 1$, онда је $x = 2004$;

2.2) Ако је $y = 2$, онда је $x = 1002$;

2.2) Ако је $y = 4$, онда је $4x = 2001$ и једначина нема решења, јер је паран број $4x$ никада није једнак непарном броју 2001.

Према томе једина решења су парови: (2004, 1) ; (1002, 2) Δ

ПРИМЕР 12. *Производ два двоцифрена броја у декадном систему је записан само помоћу четворки. Одредити чиниоце тог производа.*

РЕШЕЊЕ: Производ два двоцифрена броја увек је већи од 100, а мањи од 10000. Према томе тражени производ може бити или 444 или 4444.

1) Како је $444 = 4 \cdot 111 = 4 \cdot 3 \cdot 37$, то је једно решење $12 \cdot 37$.

2) Слично је $4444 = 4 \cdot 1111 = 4 \cdot 11 \cdot 101 = 44 \cdot 101$. Како је 101 прост број, то у овом случају не постоје таква два двоцифрена броја, броја, па проблем нема решења. Δ

ПРИМЕР 13. *Доказати да не постоје цели бројеви x и y такви да је* $x^2 + y^2 = 2006$.

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2 и y^2 је 2006, дакле паран, па се разликују само два случаја, јер случај да су x и y различите парности није могућ, пошто би тада збир $x^2 + y^2$ био непаран:

1) Ако су бројеви x и y парни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је $x = 2к$ и $y = 2l$. Тада је $4к^2 + 4l^2 = 2006$. Како је лева страна једначине дељива са 4, а десна није, то једначина у овом случају нема решења.

2) У случају да су бројеви x и y непарни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је $x = 2к+1$ и $y = 2l+1$. Тада је $4к^2 + 4к + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2006$, односно $4к^2 + 4к + 4l^2 + 4l = 2004$. Упрошћавањем једначине добија се $к(к + 1) + 1(l + 1) = 501$. Како је са леве стране једначине увек паран број, а са десне непаран број, то једначина ни у овом случају нема решења. Δ

На основу изложених примера и њихових решења може се размотрити и општији проблем:

Одредити скуп свих решења проблема P(x, y, z, …) где су x, y, z, … промењљиве које егзистирају у оквиру датог проблема.

Нека је S непразан скуп који представља област дефинисаности датог проблема P (x, y, ...).

Метод разликовања случајева заснива се на чињеници да се скуп S може поделити на коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2, \ldots S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_к = S$ ($Si \cap Sj = \varnothing$; i, j $\in N$, за свако $i \neq j$), дакле таквих да они у потпуности прекривају скуп могућих решења S.

Метод разликовања случајева, решавање проблема P своди на решавање проблема P у сваком од скупова $S_1, S_2, \ldots S_к$. Нека су $R_1, R_2, \ldots R_к$ решења проблема P, у сваком од скупова $S_1, S_2, \ldots S_к$ (при чему неки од њих могу бити и празни) Тада је решење R проблема P унија решења $R_1, R_2, \ldots R_к$, тј. $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_к$.

То је можда дуготрајнији, али методолошки лакши посао, јер се скупови $S_1, S_2, \ldots S_к$ могу бирати тако да решавање проблема P у њима буде што једноставније.

Метод разликовања случајева је погодан метода за решавање Диофантових једначина, али њену моћ не би требало прецењивати, јер и она попут других метода садржи извесну произвољност. Конкретно, поставља се питање: Како раздвојити случајеве ?

Раздвајање случајева и јесте највећи проблем приликом примене овог метода, јер се не може унапред одредити како разбијати скуп S. Међутим, из приказаних примера и досадашњег разматрања, искуствено се могу формулисати следећи методолошки принципи:

1. При раздвајању случајева, скуп потенцијалних решења, тј. скуп S у потпуности се прекрива са коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2, \ldots S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_к = S$ (принцип потпуности). На тај начин се избегава могућност да било које потенцијално решење буде изостављено.

2. За метод разликовања случајева од нарочитог значаја су случајеви:

(а) Када у одабраном подскупу S_i $(1 \leq i \leq k)$ дати проблем P нема ниједно решење, тј. $R_i = \varnothing$ и

(b) Када у одабраном подскупу S_j $(1 \leq j \leq k)$ дати проблем P увек има решења, тј. када је $R_j = S_j$.

Зато при разликовању случајева треба уочити што више подскупова који задовољавају услове (a) и (b) (принцип рационалности).

3. Приликом разликовања случајева и прекривања скупа потенцијалних решења дисјунктним подскуповима (кад год је то плодотворно) користити логична разбијања скупа могућих решења S. У теорији бројева најчешће се скуп целих бројева или неки његов подскуп, разбија : на парне и непарне; на негативне, нулу и позитивне; на класе еквиваленција по одређеном модулу, … (принцип природности).

4. Метод разликовања случајева заснива се на примени већ познатих математичких истина (Питагорине теореме, познатих неједнакости, …) које се као случајеви јављају у решавању проблема P (принцип примене).

Метод разликовања случајева није свемогућ, нити универзалан, али може бити веома користан у решавању многих проблема, па и Диофантових једначина.

При том, принцип 2(a) је од нарочитог значаја, јер он служи за елиминацију случајева који немају реалан смисао, те се на тај начин скуп потенцијалних решења своди на неку од својих рестрикција. Ово је и примарно методолошко упутство које указује на први корак у раздвајању случајева, а он је свођење скупа могућих решења на што мање подскупова.

У наредним поглављима и примерима систематски се илуструје примена метода разликовања случајева и других поступака на решавање Диофантових једначина.

ЗАДАЦИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

1. У једнакостима $* + * = * - * = * \cdot * = ** : *$ уместо звездица ставити цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 тако да се свака цифра употреби само једном и да све једнакости буду тачне.

2. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $p^2 + q^2 = 2007$.

3. Доказати да једначина $x^2y - xy^2 = 2006$ нема решења у скупу целих бројева.

4. Колико има двоцифрених природних бројева који су седам пута већи од збира својих цифара?

5. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - x^2 - 2$ нема решења. Доказати.

6. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $x^4 + 5 = xy^2 + x^2y$.

7. Постоји ли двоцифрен природни број који је једнак збиру квадрата својих цифара?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

8. Одредити све просте бројеве p, q и r који задовољавају једначину $p^q + q^p = r$. (Србија 1991.)

9. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног природног броја записује се у декадном запису само помоћу неколико цифара 2. Одредити о којим бројевима је реч. (Србија 1996.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

10. Дешифруј следећи математички ребус: $\overline{\text{број}} = (\text{б} + \text{р} + \text{о} + \text{ј})^4$.

11. Постоји ли двоцифрен природан број чији је квадрат једнак кубу збира његових цифара?

2. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

2.1. МАТЕМАТИЧКИ РЕБУСИ

Најједноставније Диофантове једначине су математички ребуси. Метод разликовања случајева код ових проблема се показује плодоносним, јер је раздвајање случајева доста олакшано, пошто су цифре елементи скупа $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Основни принцип на коме почивају многе идеје и методе које се користе при решавању Диофантових једначина је садржан у једноставној чињеници да све оно што важи за једну страну једнакости, због особине рефлексивности једнакости ($a = a$), важи у идентичној форми и за другу страну једнакости. Ако је лева страна једнакости увек паран број, онда то мора бити и десна; ако је лева страна потпун квадрат, онда је то и десна; ако је лева увек мања од неке вредности, онда је то и десна ...

ПРИМЕР 14. *Дешифровати множење* $* 4 * \cdot 15 = 3 * 9 *$.

РЕШЕЊЕ: Лева страна једнакости је дељива са 15, што значи да је и допроизвод дељив са 15, дакле и са 3 и са 5, па се могу извући следећи закључци: a) збир цифара броја 3 * 9 * је дељив са 3; b) последња цифра броја 3 * 9 * је 0 или 5; c) друга цифра првог чиниоца је 4. На основу ових закључака разликују се два случаја:

1) Ако је последња цифра производа, тј. друга звездица једнака 0, онда је збир цифара 12 + *, па због услова дељивости збира цифара са 3, прва звездица може бити 0, 3, 6 или 9, па се ради о производу 3090, 3390, 3690 или 3990.

Како добијени бројеви при дељењу са 15 дају редом количнике 206, 226, 246 или 266, јасно је да због услова c) постоји само једно решење: $246 \cdot 15 = 3690$.

2) Ако је последња цифра производа 5, онда је збир цифара 17 + * па је због услова b) друга звездица једнака 1, 4 или 7, односно ради се о производима 3195, 3495 или 3795. Ови бројеви при дељењу са 15 дају количнике 213, 233 или 253, па ниједан не задовољава услов c), јер му друга цифра није 4. Δ

<u>ПРИМЕР 15.</u> Одредити цифре a, b и c, тако да важи једнакост: $\overline{aa} + \overline{bb} = (\overline{cc})^2$.

РЕШЕЊЕ: У овом примеру уместо звездица су дата слова, што упућује да се проблем прво мора са језика ребуса превести на језик једначина, а тек потом решавати. Дата једнакост се лако преводи у облик $11a + 11b = (11c)^2 = 121c^2$. Очигледно су и лева и десна страна једнакости дељиви са 11, па се после дељења са 11 добија једначина: $a + b = 11c^2$. Како су a и b цифре, њихов збир може бити највише 9 + 9 = 18, па је $11c^2 \leq 18$, што значи да је $11c^2 = 11$, па је c = 1. Тада је a + b = 11, па задатак има више решења: 22 + 99 = 33 + 88 = … = 66 + 55 = 77 + 44 = 88 + 33 = 99 + 22 = 121 = 11^2 . Δ

<u>ПРИМЕР 16.</u> Одредити цифре a, b и c и природан број n, тако да је $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$. *Колико има решења?*

РЕШЕЊЕ: Збир једног једноцифреног, једног двоцифреног и једног троцифреног броја $a + \overline{bb} + \overline{ccc}$ увек је већи од 1 + 11 + 111 = 122, а мањи од 9 + 99 + 999 = 1107. Дакле, важи неједнакост $121 < 122 \leq n^4 \leq 1107 < 1225$.

Значи да је $11 < n^2 < 35$, па је $3 < n < 6$, односно n = 4 или n = 5. Разликују се два случаја:

1) Ако је n = 4, онда је $n^4 = 256 = 222 + 33 + 1$;
2) Ако је n = 5, онда је $n^4 = 625 = 555 + 66 + 4$. Δ

Детаљније о математичким ребусима говоре проблеми који се дају за самосталан рад:

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

12. Уместо звездица написати одговарајуће цифре тако да одузимање * * * * * - * * * * = * * * буде тачно, ако се умањеник, умањилац и разлика читају с лева на десно једнако као и с десна на лево.

13. Да ли ребус * * * + * * * = * * * има решење ако се свака од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 може употребити само једном?

14. Да ли ребус * * * * - * * * = * * * има решење ако се свака од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 може употребити само једном?

15. Ако је x једноцифрен, а y двоцифрен природни број дешифровати започето множење: x · y · 45 = 22 * * . Колико има решења?

16. У броју * * * * * * * * * * уместо звездица распоредити цифре 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да се свака цифра употреби само једном и да добијени број буде дељив са 99. Који је најмањи, а који највећи такав број?

17. Одредити све двоцифрене природне бројеве x и y тако да је испуњена једнакост $x \cdot y \cdot 22 = 3 * 4 *$.

18. Одредити цифре a и b и природан број n тако да је $\dfrac{\overline{199a1b}}{12} = n$.

19. Дешифровати квадрирање: $(***)^2 = *00**$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

20. Дат је разломак $\dfrac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot U \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$. Израчунати вредност разломка ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (Србија 1990.)

21. Одредити непознате цифре a и b тако да је $3 \cdot \overline{3a} = 2 \cdot \overline{5b}$. Колико има решења? (Србија 1991.)

22. Заменити звездице одговарајућим цифрама и израчунати природан број n, ако је $*71* : 36 = n$. (Србија 1991.)

23. Дешифровати множење: $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$. (Србија 1991.)

24. Разломци $\dfrac{3*5*}{36}$ и $\dfrac{4*7*}{45}$ су природни бројеви. Упоредити их по величини. (Србија 1995.)

25. Дешифровати множење: $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$. (Србија 1995.)

26. Дешифровати квадрирање: $(5c + 1)^2 = \overline{abcd}$ ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (Србија 1996.)

27. Дешифровати множење: $*2* \cdot 45 = (**)^2$. (Србија 1998.)

28. Дешифровати сабирање $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 2002$.(Србија 2002).

29. У једнакости 7 * 8 = * 9 · 8 + 7 *, заменити звездице цифрама тако да једнакост буде тачна (Србија 2005).

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

30. Одредити међусобно различите цифре a, b и c и природан број n, тако да важи једнакост $a + \overline{ab} + \overline{abc} = n^3$. Колико има решења?

31. Који троцифрени број има особину да се 6 пута смањи ако му се избрише цифра десетица?

32. Дат је број $\overline{aaa...aaa} + \overline{bbb...bbb}$ у коме је 2000 цифара a и 1000 цифара b (a и b су цифре различите од нуле). Одредити a и b тако да дати број буде дељив са 36.

2.2. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ПРОСТИМ БРОЈЕВИМА

Код Диофантових једначина које се односе на просте бројеве користе се идеје које су добро познате када су прости бројеви у питању. Свакако најексплоатисаније од тих идеја су оне које почивају на следећим једноставним тврђењима (које наводимо без доказа):

- Број 2 је једини паран прост број ;
- Сви прости бројеви већи од 2 су непарни ;
- Број 3 је једини прост број који је дељив са 3 ;
- Сви прости бројеви већи од 2 су облика 4к–1 или 4к+1
- Сви прости бројеви облика 4к – 1 или 4к + 1 нису прости ;
- Сви прости бројеви већи од 3 су облика 6к–1 или 6к +1
- Сви бројеви облика 6к – 1 или 6к + 1 нису прости ;
- Сви прости бројеви већи од 5 завршавају се цифрама 1,3,7, или 9.

Са неколико примера илустроваће се како се наведена тврђења користе у решавању Диофантових једначина са простим бројевима.

<u>*ПРИМЕР 17:*</u> *Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q тако да је a) 2p + 3q = 200 ; b) 2p + 3q = 201.*

РЕШЕЊЕ: а) Ако је 2p + 3q = 200, онда је 3q = 200 – 2p, па је с десне стране једнакости паран број, што значи да и 3q мора бити паран број.

Дакле, $q = 2$, а $2p = 200 - 6 = 194$. Како је $p = 97$ прост број, то је $p = 97$, $q = 2$ једино решење.

b) Ако је $2p + 3q = 201$, онда је $2p = 201 - 3q = 3(67 - q)$. Како је десна страна једнакости дељива са 3 то мора бити и лева. Број 2p је дељив са 3 само ако је $p = 3$, јер је $p = 3$ једини прост број дељив са 3. Тада је $2 = 67 - q$, а $q = 65$ што није прост број. Закључак је да ова једначина нема решења у скупу простих бројева. Δ

<u>*ПРИМЕР 18:*</u> *Колико има природних бројева n таквих да важи једнакост $5p + 13q = 65n$, ако су p и q прости бројеви?*

РЕШЕЊЕ: Ако је $5p + 13q = 65n$, онда је $5p = 13(5n - q)$, па 5p мора бити дељиво са 13, што значи да је $p = 13$.

Слично је и $13q = 5(13n - p)$, па је 13q дељиво са 5, односно $q = 5$. Дакле $65n = 5\cdot 13 + 13\cdot 5 = 130$, па је $n = 2$, једини број који испуњава горњи услов. Δ

<u>*ПРИМЕР 19:*</u> *Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $7p + 11q = 400$?*

РЕШЕЊЕ: Како је 400 паран број то су 7p и 11q или оба парна или оба непарна. Ако су оба парна онда је $7p + 11q = 24 + 22 = 46$, што је много мање од 400. Ако су p и q непарни: за $p = 3$, q није цео број, а за $q = 3$, p није цео број.

Ако су p и q прости бројеви већи од 3, онда је $p = 6к \pm 1$ и $q = 6m \pm 1$ ($k \in N$, $m \in N$).

Разматрањем све четири комбинације добијају се једначине: $6(7k + 11m) = 418$; $6(7k + 11m) = 404$; $6(7k + 11m) = 396$; $6(7k + 11m) = 382$. Од свих добијених бројева једино је 396 дељиво са 6, па из $6(7k + 11m) = 396$, следи да је $7k + 11m = 66$. Како су 11m и 66 дељиви са 11, то мора бити и 7к. Дакле $к = 11$, што није могуће, јер би тада m било -1, што није прост број. Δ

<u>*ПРИМЕР 20:*</u> *Одредити све просте бројеве p, q и r, такве да важи једнакост $p + pq + pq\,r = 38$?*

РЕШЕЊЕ: Ако је $p + pq + pq\,r = 38$, онда је $p(1 + q + q\,r) = 38 = 2\cdot 19$. Јасно је да је израз у загради већи од 2, па је због тога $p = 2$. Тада је $q(1 + r) = 18$. Како је $1 + r$ веће од 2, то је $q = 3$, а $r + 1 = 6$, па је $r = 5$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

33. Ако су x и y природни, а p прост број одредити сва решења једначине: a) $x \cdot y = 17$; b) $x \cdot y = p$?

34. Одредити решења једначине: a) $x \cdot y = 49$; b) $x \cdot y = p^2$, ако су x и y природни, а p прост број?

35. Колико решења има једначина: a) $x \cdot y = 64$; b) $x \cdot y = p^n$, ако су x, y и n природни, а p прост број?

36. Колико решења у скупу простих бројева има једначина $p + q = 30$?

37. Постоје ли прости бројеви p и q такви да важи једнакост: $3p + 5q = 67$?

38. Одредити сва решења једначине $5p - 7q = 1$, ако су p и q прости бројеви?

39. Колико решења у скупу простих бројева има једначина $17p + 11q = 155$.

40. Одредити све просте бројеве p и q тако да је испуњена једнакост $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = 2$.

41. Доказати да једначина $\frac{p}{4} + \frac{q}{15} = n$ нема решења, ако су p и q прости, а n природан број.

42. Колико решења има једначина $p^3 + 3^p = q$, ако су p и q прости бројеви.

43. Одредити решења једначине $p^q + q^p = 57$, ако су p и q прости бројеви?

44. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = p$, ако су x, y и z природни, а p прост број?

45. Одредити сва решења следећих једначина: a) $x \cdot y \cdot z = 9$; b) $x \cdot y \cdot z = p^2$ ако су x, y и z природни, а p прост број?

46. Постоје ли прости бројеви p, q и r, такви да је $p + q + r = 100$?

47. Одредити просте бројеви p, q и r, ако је $p + 2q + 3r = 37$?

48. Одредити све просте бројеве p, q и r тако да задовољавају једначину $pq + r = 23$.

49. Колико решења има једначина $pq + qr = 40$, ако су p, q и r прости бројеви?

50. Да ли једначина $pq + qr + rp = 2006$ има решења, ако су p, q и r прости бројеви?

51. Које особине има природан броја к, ако једначина $pq + qr + rp = 2к$ има решење?

52. Одредити све просте бројеве p, q и r који испуњавају једнакост је $p^q + q^r + r^p = 166$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

53. Нека су p, q и r прости бројеви и a, b и c такви природни бројеви да важи $p = a^b + c$, $q = b^c + a$ и $r = c^a + b$. Доказати да су у том случају два од бројева p, q и r међусобно једнаки. (Србија 2005.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

54. Колико решења има једначина $3p + 5q = 100$, ако су p и q прости бројеви?

55. За које вредности природног броја n једначина $\frac{p}{2} + \frac{q}{3} = n$ има решења, ако су p и q прости бројеви ?

56. Одредити све просте бројеве p и q , тако да је $p^2 + 2^p = q$.

57. Очигледно је: $2 + 7 = 3^2$, $3 + 13 = 4^2$, $2 + 23 = 5^2$, $5 + 31 = 6^2$ ... Да ли се квадрат сваког природног броја већег од 3 може приказати као збир два проста броја?

58. Познато је да је: $2 + 2 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 5 = 8$, $2 + 7 = 9$, $3 + 7 = 10$, $5 + 7 = 12$, $7 + 7 = 14$, $2 + 13 = 15$, $3 + 13 = 5 + 11 = 16$, ... Да ли је се сваки сложен природан број може приказати као збир два проста броја?

59. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = p^9$, ако су x, y и z цели, к природни, а p прост број и ако је $x < y < z$.

2.3. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ЦЕЛИМ БРОЈЕВИМА

Примери који следе су уводни и њима се илуструју најједноставније идеје које се користе у решавању разних Диофантових једначина. Све наведене идеје спадају у елементарне и представљају добру припрему за студиознији приступ проблематици Диофантових једначина.

<u>ПРИМЕР 21:</u> Одредити све уређене парове (х, у) целих бројеве х и у таквих да је 5х = 17у.

РЕШЕЊЕ: Ако је у цео број онда је десна страна једначине дељива са 5, па у мора бити дељиво са 5, тј. $у = 5к$ ($к \in Z$). Тада је $5х = 17 \cdot 5к$, па је $х = 17к$.

Уређени пар (17к, 5к) где је к било који цео број доказује да дата једначина има бесконачно много решења, јер за свако од бесконачно много целобројних к, се може добити одговарајуће х и у. Уређени пар (х, у) = (17к, 5к) представља ОПШТЕ РЕШЕЊЕ дате једначине. Δ

Појам општег решења Диофантове једначине је један од најважнијих појмова, а представља формулу која описује сва решења дате једначине. Опште решење је најчешће параметарског типа, тј. показује како се у зависности од вредности неког параметра мењају решења дате једначине. Опште решење може бити и функција два, па и више параметара. [6]

<u>ПРИМЕР 22:</u> Дата је једначина $x^2 + 3y = 24$. Колико решења има дата једначина у скупу природних, а колико у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Из једначине следи да је $x^2 = 24 - 3y = 3(8 - y)$. Како је десна страна увек дељива са 3 то мора бити и лева страна, што значи да је x^2, а самим тим и х дељив са 3.

С обзиром да је $x^2 < 24$, то је $x < 4$, па је $x = 3$ $y = 5$ једино решење дате једначине у скупу природних бројева.

Ако је $x = 3к$ ($к \in Z$), онда је $x^2 = 9к^2$, па је $x^2 + 3y = 9к^2 + 3y = 24$ или $3y = 24 - 9к^2$, па је $y = 8 - 3к^2$. Дакле у скупу целих бројева једначина има бесконачно много решења, а опште решење дате једначине у скупу целих бројева је : $x = 3к$, $y = 8 - 3к^2$ ($к \in Z$). Δ[7]

<u>ПРИМЕР 23:</u> Да ли једначина $x^2 + \frac{6}{y} = 10$ има коначно или бесконачно много решења у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Из једначине следи да је $10 - x^2 = \frac{6}{y}$. Како је лева страна једнакости увек цео број, то мора бити и лева.

[6] Опште решење једначине је појам о коме је већ било говора у примеру 8. претходног поглавља

[7] Када се говори о решењу неке једначине у скупу целих бројева, подразумева се да је то решење уређени пар, уређена тројка, ..., уређена n-торка целих бројева која задовољава дату једначину

То значи да је y целобројни делилац броја 6. Дакле потенцијална решења се добијају за $y \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. За назначене вредности броја y, променљива $x^2 \in \{4, 16, 7, 13, 8, 12, 9, 11\}$. Како 7, 13, 8, 12, и 11 нису квадрати целог броја то једначина има 6 целобројних решења и то: (2, 1) ; (-2, 1) ; (4, -1) ;(-4, -1) ; (3, 6) ; (-3, 6). Према томе дата једначина има коначно много решења. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

60. Одредити све природне бројеве x и y тако да задовољавају једначину $99x + 2y = 202$.

61. Доказати да једначина $15x + 40y = 2006$ нема решења у скупу природних бројева.

62. Колико решења има једначина $x + y = 2006$, ако су x и y природни бројеви?

63. Колико решења има једначина $x \cdot y = 96$, ако су x и y природни бројеви?

64. Одредити сва целобројна решења једначине $x^2 \cdot y = 48$.

65. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 \cdot y^3 = 72$?

66. Колико решења има једначина $\frac{x}{4} = \frac{5}{y}$, ако су x и y природни бројеви?

67. Одредити сва решења једначине $\frac{x}{3} = \frac{y}{8}$, ако су x и y цели бројеви.

68. Да ли једначина $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$ има решења у скупу целих бројева?

69. Колико целобројних решења има једначина $|x| + |y| = 10$?

70. Одредити сва целобројна решења једначине $xy + 28 = 0$.

71. Решити једначину $x^2 + |y| = 17$, ако су x и y цели бројеви.

72. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $3x + 39y = 2000$?

73. Одредити сва решења једначине $x^2 \cdot y = 36$ у скупу целих бројева.

74. Одредити сва целобројна решења једначине $x^2 \cdot y^3 = 108$.

75. Колико решења има једначина $x \cdot y \cdot z = 6$, ако су x, y и z цели бројеви?

76. Колико решења има једначина $\frac{xz}{9} = \frac{2}{y}$, ако су x, y и z природни бројеви?

77. Колико решења има једначина x + y + z = 6, ако су x, y и z природни бројеви, а колико, ако су x, y и z ненегативни цели бројеви?

78. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x + \frac{2}{y} = 3$.

79. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је $x^2 + \frac{4}{y^2} = 5$.

80. Одредити природне бројеве x и y тако да је $\frac{19}{x} + \frac{99}{y} = 109$.

81. Одредити све природне бројеве x и y тако да је: a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$; c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

82. Одредити све природне бројеве n за које једначина $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = n$ има решења у скупу природних бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

83. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $\frac{x}{2} + \frac{3}{y} = 4$?

84. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $\frac{8}{x} + \frac{9}{y} = 5$.

85. Дата је једначина $\frac{2005}{x} + \frac{2006}{y} = 2007$. Колико решења има дата једначина, ако су x и y природни бројеви.

86. Дата је једначина x + y + z = к (к је природан број већи од 2). Колико решења има дата једначина ако су x, y и z природни бројеви, а колико, ако су ненегативни цели бројеви?

87. Да ли се сваки природан број к може приказати као збир два проста броја p и q?

88. Да ли се сваки природан број к може приказати као разлика два проста броја p и q?

2.4. НЕКЕ ПРИМЕНЕ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Елементарне Диофантове једначине имају и своју примену. Ево неких, најзанимљивијих примера примене у којима прво треба проблем превести са обичног, на математички језик, а потом добијену Диофантову једначину решити.

ПРИМЕР 24: Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли мерни број њене површине бити 300?.

РЕШЕЊЕ: Нека је мерни број ивице коцке a. Тада је површина коцке $6a^2 = 300$, па је $a^2 = 50$. Како не постоји природан број чији је квадрат 50, то таква коцка не постоји. Δ

ПРИМЕР 25: Дат је производ $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10{\cdot}11 = 399{*}6{*}{*}{*}$. Не вршећи множење у добијеном броју уместо звездица написати одговарајуће цифре.

РЕШЕЊЕ: Нека је добијени број $\overline{399a6bcd}$. Дати производ је дељив са $2{\cdot}5{\cdot}10 = 100$, па су последње две цифре c и d добијеног броја нуле. Број је дељив са 9, па збир цифара добијеног броја $27 + a + b$ такође мора бити дељив са 9, што значи да је и збир $a + b$ једнак 0, 9 или 18. Број је дељив и са 11 па је разлика $(3 + 9 + 6) - (9 + a + b) = 9 - a - b$ дељива са 11, што значи да је $a + b = 9$. Због дељивости са 4, цифра b је 0, 4 или 8. Ка како је 399 дељиво са 7, то мора бити и број a6b, што значи да је a6b или 960, или 564 или 168. Како је само 168 дељиво са 7, тражени број је 39916800. Δ

ПРИМЕР 26: Одредити најмањи и највећи осмоцифрени број који има збир цифара 40? О којим бројевима је реч ако све цифре морају бити различите?

РЕШЕЊЕ: Ако се цифре могу понављати најмањи такав број је 10039999, а највећи 99994000.

Како све цифре морају бити различите, како је збир свих десет цифара $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 0 = 45$ и како се прави осмоцифрен број, то значи да из збира морају изостати цифре чији је збир $45 - 40 = 5$.

Дакле $0 + 5$, $1 + 4$ или $2 + 3$. Ако се прави најмањи, али и највећи број изостаће 2 и 3, а добиће се бројеви 10456789, односно 98765410. Δ

<u>*ПРИМЕР 27:*</u> *Одредити најмањи и највећи природан број чије су све цифре различите, ако је производ цифара тог броја 720.*

РЕШЕЊЕ: Најмањи број је онај који се може направити са што мање цифара. Како је $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, то најмањи број не може бити троцифрен, јер се ни 5 ни 9 не могу комбиновати са 2. Према томе најмањи такав број је 2589.

Највећи број је онај који има што више цифара, а такав је број чије су цифре 1, 2, 3, 2·2, 5, 2·3, дакле број 654321. Напомена: Нула се не сме ставити на крај броја, јер би тада производ цифара био 0, а не 720. Δ

<u>*ПРИМЕР 28:*</u> *Постоји ли двоцифрен број који је једнак збиру своје цифре десетица и квадрата цифре јединица?*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени двоцифрени природни број $\overline{xy}$. Тада је $10x + y = x + y^2$. Дакле $9x = y^2 - y = y(y-1)$. Како су бројеви y и y-1 узастопни, они су и узајамно прости, што значи да немају заједничких делилаца. Пошто је лева страна једнакости дељива са 9 то је са 9 дељив или број y или y – 1. Дакле или је y = 9 или је y – 1 = 9, односно y = 10. Други случај отпада, па остаје само вредност y = 9. Тада је $9x = y(y-1) = 9 \cdot 8$, што значи да је x = 8. Тражени двоцифрени број је $89 = 8 + 9^2$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

89. Одредити три природна броја чији је збир једнак њиховом производу.

90. Постоји ли десет природних бројева таквих да је њихов збир једнак њиховом производу и једнак броју 20?

91. Збир к природних бројева једнак је њиховом производу и једнак је 2007. Одредити најмањи и највећи такав број к?

92. Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли површина коцке бити 1234?

93. Може ли запремина коцке, чији је мерни број ивице природан број, бити 432?

94. Постоји ли квадар чија је површина 987654321 ако су мерни бројеви његових ивица природни бројеви?

95. Колико има седмоцифрених бројева чији је збир цифара 3.

96. Колико има петоцифрених бројева који имају збир цифара 43.

97. Постоји ли природан број чији је производ цифара једнак 2000? Одредити најмањи такав природан број.

98. Постоји ли четвороцифрени природан број чији је производ цифара једнак 3360?

99. Колико има петоцифрених бројева чији је производ цифара 0?

100. Колико има троцифрених бројева чији је производ цифара 144?

101. Колико има троцифрених бројева чији је збир цифара 5?

102. Колико најмање и највише цифара може имати природан број чији је производ цифара 512?

103. Колико има четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара 360?

104. Природан број n^6 записује се цифрама 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9. Одредити природан број n.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

105. Постоји ли троцифрен број који је једнак збиру своје цифре јединица, квадрата цифре десетица и куба цифре стотина?

106. Одредити најмањи дестоцифрени број за који важи: прва цифра једнака је броју јединица у декадном запису, друга броју двојки, трећа броју тројки, ..., девета броју деветки и десета броју нула у декадном запису тог броја.

107. Очигледно је: $4 = 2\cdot2 = 2+2$, $6 = 1\cdot2\cdot3 = 1+2+3$, $8 = 1\cdot1\cdot2\cdot4 = 1+1+2+4$, $9 = 1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3 = 1+1+1+3+3$, ...Испитати да ли се сваки сложен број s може приказати у облику производа неколико природних бројева чији је збир такође s.

108. На колико се начина сума од 100 динара може исплатити новчаницама од 1, 2 и 5 динара?

3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

Решавање Диофантових једначина методом последње цифре заснива се на једноставној чињеници да ако је у једнакости A = B, последња цифра броја A једнака s, онда је и последња цифра броја B такође једнака s. Наравно исти принцип важи и за последње две, три, ..., последњих к цифара.

Интересантно је посматрати последње цифре бројева n^k, a^n, производа неколико узастопних природних бројева, броја n!, ... и добијене резултате искористити за решавање неких Диофантових једначина .

3.1. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА n^k

Последње цифре броја n^k показују извесну законитост која се веома успешно може применити као основа за разликовање случајева приликом разматрања појединих Диофантових једначина.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

109. Природан број n завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }. Одредити којом цифром се у том случају завршавају бројеви n^2, n^3, n^4, ..., n^{16}, n^{17} и попуни наредну таблицу:

Последња цифра броја n $\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра броја n^2 $\rightarrow$										
Последња цифра броја n^3 $\rightarrow$										
Последња цифра броја n^4 $\rightarrow$										
Последња цифра броја n5 $\rightarrow$										
Последња цифра броја n^6 $\rightarrow$										

Последња цифра броја n^6 →										
Последња цифра броја n^7 →										
Последња цифра броја n^8 →										
Последња цифра броја n^9 →										
Последња цифра броја n^{10} →										
Последња цифра броја n^{11} →										
Последња цифра броја n^{12} →										
Последња цифра броја n^{13} →										
Последња цифра броја n^{14} →										
Последња цифра броја n^{15} →										
Последња цифра броја n^{16} →										

110. Доказати да је последња цифра квадрата природних бројева 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

111. Квадрати природних бројева никада се не завршавају цифрама 2, 3, 7 и 8. Доказати.

112. Ако је n природан број, онда је последња цифра броја n^4 једнака 0, 1, 5 или 6. Доказати.

113. Доказати да се четврти степен природног броја никада не завршава цифрама 2, 3, 4, 7, 8, 9.

114. Ако је n природан број, онда је последња цифра броја $n^5 - n$ нула, тј број $n^5 - n$ је дељив са 10. Доказати.

115. За сваки природан број a, бројеви n^a и $n^{4к+a}$ завршавају се истом цифром ($n\in N$, $k\in N$). Доказати.

<u>ПРИМЕР 29.</u> Користећи наредну таблицу испитај да ли постоје природни бројеви x и y, такви да важи једнакост: $x^2 + 5y = 1234567$?

РЕШЕЊЕ: Број x^2 се увек завршава цифрама 0, 1, 2, 4, 5, 6 или 9 (прва врста), а број 5y се увек завршава цифрама 0 или 5 (прва колона).

5y ↓	x^2→	0	1	4	5	6	9
0		0	1	4	5	6	9
5		5	6	9	0	1	4

Тада се њихов збир $x^2 + 5y$ увек завршава једном од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9 и никада не завршава цифрама 2, 3, 7 или 8, па је зато немогуће да $x^2 + 5y$ буде једнако са 1234567. Δ

116. Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост: $x^2 + 5y^2 = 333\ 333\ 333$?

117. Направити одговарајућу таблицу и ако је n природан број, одреди која је последња цифра бројева $2n^2$, $4n^2$, $6n^2$, $8n^2$?

118. Искористити наредну таблицу и одредити да ли једначина $5x^2 + 2y^2 = 1999$ има решења у скупу целих бројева?

$5x^2\downarrow$	$2y^2\rightarrow$			

<u>ПРИМЕР 30.</u> Одредити да ли једначина $x^4 + y^4 = 123456789$, има решења ако су x и y цели бројеви?

РЕШЕЊЕ: Конструише се таблица чији су елементи последње цифре четвртих степена броја x^4, односно y^4. Како се квадрати целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то се њихови квадрати, тј. четврти степени целих бројева завршавају цифрама 0, 1, 5 или 6. Упишемо у таблицу последње цифре и онда те последње цифре саберемо, а у таблицу уносимо последњу цифру збира.

$x^4\downarrow$	$y^4\rightarrow$	0	1	5	6
0		0	1	5	6
1		1	2	6	7
5		5	6	0	1
6		6	7	1	2

Из таблице је очигледно да се $x^4 + y^4$ може завршавати цифрама 0, 1, 2, 5, 6 или 7 и не може завршавати цифрама 3, 4, 8 и 9. Према томе једначина $x^4 + y^4 = 123456789$ нема решења. Δ

119. Доказати да једначина $x^4 + 3y^4 = 777\ldots777$ (број седмица је n) нема целобројних решења ни за један природан број n.

120. Да ли једначина $x^2 + 4y^4 = 98765432$ има решења у скупу целих бројева?

121. За које вредности једноцифреног природног броја n, једначина $x^4 + 4y^2 = 10к + n$ нема решења у скупу целих бројева (x, y и $к \in N$)?

122. Постоје ли цели бројеви x, y и z, такви да је $x^4 + y^4 + z^4 = 999\ldots999$ (број деветки је произвољан)?

123. Да ли једначина $3x^4 + 4y^8 + 5z^{16} = 987654321$ има решења у скупу целих бројева?

124. Одреди да ли једначине $x^4 - y^4 = 12345678$ и $x^4 – 2y^4 = 7$ имају решења у скупу целих бројева?

125. Да ли једначина $x^5 – x + y^2 = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

126. Постоје ли цели бројеви x, y и z такви да једначина $x^{24} + y^{20} = z^{16} - z^{12} + 4$ има решења?

127. Да ли једначина $x^7 - x^3 + y^2z^4 = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

128. Ако су x, y и z цели бројеви онда једначина $x^4y^8 - z^5 + z = 2$ нема решења. Доказати.

129. Одредити све једноцифрене бројеве n за које једначина $x^4 + y^5 – y + 5z = n$ има бесконачно много целобројних решења.

3.2. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА a^n

У претходним примерима смо посматрали квадрате, треће степене, ... природних бројева и утврђивали правилност која се може при том уочити. Сада ћемо истраживати последње цифре бројева $...1^n$, $...2^n$, ... , $...9^n$ и опет покушати да уочимо правила која се могу користити за успешно решавање неких класа Диофантових једначина.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

130. Природан број а завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } . Одредити којом цифром се у том случају завршавају бројеви a^2, a^3, a^4, ... a^{12}, a^{13}, ... a^n и попуни наредну таблицу водећи рачуна о разним случајевима за природан број n :

Последња цифра броја а	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра броја a^2										
Последња цифра броја a^3										
Последња цифра броја a^4										
Последња цифра броја a^5										
Последња цифра броја a^6										
Последња цифра броја a^7										
Последња цифра броја a^8										
Последња цифра броја a^9										
Последња цифра броја a^{10}										
Последња цифра броја $a^{4к+1}$										
Последња цифра броја $a^{4к+2}$										
Последња цифра броја $a^{4к+3}$										
Последња цифра броја $a^{4к}$										

131. Ако је n природан број, која је последња цифра броја 11^n? Ако су к и n природни бројеви, онда је последња цифра броја $(10к + 1)^n$ једнака 1. Доказати.

132. Која цифра је последња цифра броја 5^{2006}? Ако је n природан број, онда је последња цифра броја 5^n једнака 5. Доказати

133. Ако је n природан број, која је последња цифра броја $6^{4567890n}$? Доказати да је последња цифра броја 6^n једнака 6 за сваки природан број n.

134. Којом цифром се завршава број 4^{4444}? Ако је n паран природан број, онда је последња цифра броја 4^n једнака 6, а ако је n непаран број онда се број 4^n завршава цифром 4. Доказати.

135. Ако је n природан број, која је последња цифра броја $9^{876543210n}$? Доказати да ако је n паран природан број, онда је последња цифра броја 9^n једнака 1, а ако је n непаран број онда се број 9^n завршава цифром 9.

136. Која је последња цифра броја $7^{123456789}$? Којим цифрама се завршавају бројеви облика 7^n

137. Да ли једначина $6^x + 31^y = 123456789$ има решења у скупу природних бројева?

138. Доказати да једначина $99^x - 44^y = 111...111$ нема решења ако су x и y природни бројеви.

ПРИМЕР 31. *Одредити да ли постоје природни бројеви x, y и z, такви да важи једнакост* $4^x + 9^y = 11^z$*?*

РЕШЕЊЕ: Број 4^x се завршава цифрама 4 или 6, а број 9^y цифрама 1 или 9. Према томе збир $4^x + 9^y$ се може завршавати цифрама ...4 + ...1= ...5, ...4 + ...9 = ...3, ...6 + ...1 = ...7 и ...6 + ...9 = ...5. Дакле, $4^x + 9^y$ се завршава цифрама 3, 5 или 7, а 11^z увек цифром 1, што значи да ако су x, y и z, природни бројеви једначина нема решења.

139. Постоји ли природан број n такав да једначина $5^x + 6^y + 7^z = 666…66$ (шестица је тачно n) има решење у скупу природних бројева?

140. Да ли једначина $8·5^x + 7·6^y + 6·7^z = 98765432$ има решење ако су x, y и z природни бројеви?

141. Постоји ли природан број x такав да је $2^x + x^2 = 555\ 555\ 555$.

142. Користећи наредну таблицу одреди да ли постоје природни бројеви x и y, такви да је $x^2 + 5^y = 12345678$?

$5^y \downarrow$	$x^2 \rightarrow$	0	1	4	5	6	9
5							

143. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^4 + 6^y = 876543$?

144. Ако су p, q и r прости бројеви, онда једначина $p^4 + q^4 = r^4$ нема решења. Доказати.

145. Постоји ли природан број n такав да једначина $x^{2000} + 1999^y = 888...888$ (број осмица је n) има решења у скупу целих бројева?

146. Нека је x природан, а p прост број. Доказати да једначина $4^x + p^4 = 9876543$ нема решења.

147. Ако су p, q и r прости бројеви, решити једначину $5p^4 + 6q^4 = 7r^4$.

148. Одредити све једноцифрене бројеве n тако да једначина $x^{64} + 64^y = 10к + n$ има решење у скупу целих бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

149. Одредити све природне бројеве x и све просте бројеве p тако да је $5^x + p^5 = 157$.

150. Ако су p, q и r прости бројеви, онда једначине $p^{4к} + q^{4к} = r^{4к}$ нема решења. Доказати.

151. Дата је једначина $p^{100} + q^{200} + r^{300} = 10k + n$, где су p, q и r прости, а к и n природни бројеви. Одредити једноцифрени број n тако да дата једначина има решење?

3.3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ ПРОИЗВОДА НЕКОЛИКО УЗАСТОПНИХ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

152. Природан број n завршава се једном од десет цифара из скупа {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } . Одредити којом цифром се у том случају завршава производ два, три, четири, пет и више узастопних природних бројева и попуни наредну таблицу:

Последња цифра броја n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последња цифра n(n +1)										
Последња цифра n(n +1)(n+2)										
Последња цифра (n+1)(n+2)(n+3)										
Последња цифра производа више узастопних целих бројева										

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

153. Које су последње цифре производа два узастопна природна броја?

154. Којим цифрама се никада не завршава производ три узастопна природна броја?

155. Које су последње цифре производа четири узастопна природна броја?

156. Којим цифрама се никада не завршава производ пет узастопних природних бројева?

157. Доказати да је производ два узастопна природна броја дељив са 2, производ три узастопна природна броја је дељив са 6, а производ четири узастопна природна броја дељив са 24.

158. Производ пет узастопних природних бројева је дељив са 120. Доказати.

159. Постоји ли цео број x, такав да важи једнакост $x^2 + x = 987654$?

160. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x(x + 1) + 1998y^{1999} = 1234567$?

161. Да ли једначина $x^2 + y^2 = x - y + 7654321$ има решења у скупу целих бројева?

<u>*ПРИМЕР 32.*</u> *Може ли збир првих n природних бројева бити 444 444 ?*

Решење: Нека је 1 + ... + n = 444 444. Тада је $\frac{n(n+1)}{2} = 444\ 444$, што значи да је n (n + 1) = 888 888, што није могуће, јер се производ два узастопна броја може завршавати само цифрама 0,1 или 6. Δ

162. Постоји ли природан број n такав да једначина $1 + 2 + 3 + \ldots + x + 5^y = 222\ldots222$ (број двојки је n) има решења у скупу целих бројева?

163. Користећи таблицу испитати да ли једначина $x^4 + y^4 = y^2 + 123456789$ има решења у скупу целих бројева?

$y^2(y^2-1)$ ↓	x^4 →				

164. Да ли постоји цео број x такав да је x(x+1)(x+2) = 98765432?

165. Да ли једначина x(x-1)(x-2) = 4444444444 има целобројних решења?

166. Постоје ли цели бројеви x и y који задовољавају једначину $x^3 - 3x^2 + 2x - 11^y = 234567$?

167. Одредити једноцифрен број n тако да једначина $5x + y^3 + 6y^2 + 11y + 6 = 10к + n$ има решење?

5x ↓	$y^3 + 6y^2 + 11y + 6$ →			

168. Постоји ли цео број x такав да важи једнакост $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 888\ 888\ 888$?

169. Да ли једначина $x(x - 1)(x-2)(x - 3) = 987654$ има целобројних решења?

170. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4^x + y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y = 987654312$?

171. Одредити једноцифрен број n тако да једначина $x^4 + y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y = 10к + n$ има решење, ако су x, y и к цели бројеви?

172. Ако је $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 1234567890$ онда x није цео број. Доказати.

173. Дата је једначина $x^5 - 5x^3 + 4x + 7^y = 10к + n$, где су x, y и к природни бројеви, а n једноцифрен природан број. Доказати да дата једначина има решење само ако је $n \in \{1, 3, 7, 9\}$.

174. Дата је једначина $x^5 + y^5 + 4x = 5x^3 + y + 1999$. Доказати да дата једначина нема целобројних решења.

175. Којим цифрама се завршава производ два узастопна цела броја исте парности?

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

176. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^3 + 5^y = x + 9876543$?

177. Да ли једначина $x^2 + 2x + 6^y = 12345678$ има решења у скупу целих бројева?

178. Одредити једноцифрени природни број n тако да једначина $1 + 2 + 3 + \ldots + x - 5y = n$ има решења у скупу природних бројева? Колико решења има дата једначина?

179. Испитати за које вредности једноцифреног броај n једначина $x^4 + y^5 - 5y^3 + 4y = 10к + n$ има целобројно решење (x, y и к су цели бројеви)?

3.4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ БРОЈА n!

180. Производ првих n узастопних природних бројева $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1)n$ зове се n факторијел и обележава се са n!. Израчунати 1! , 2! , 3! , 4! , …, 10! .

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

181. Којом цифром се завршава број n!?

182. За које вредности природног броја n, је број n! непаран?

183. Доказати да је за $n \geq 4$, број n! дељив са 4.

184. Ако је $n \geq 5$, број n! се завршава цифром 0. Доказати.

185. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x! + 2y = 2007$.

<u>*ПРИМЕР 33.*</u> *Ако су x и y природни бројеви решити једначину $2x^2 + y! = 969$.*

РЕШЕЊЕ: Како је $y! = 969 - 2x^2$ и како је $2x^2$ паран број, то је y! непаран број. Значи да је y = 1, па је $2x^2 = 968$. Следи да је $x^2 = 484$ шро значи да је x = 22.Δ

186. Да ли једначина $x! + 5^y = 98765432$ има решења у скупу природних бројева?

187. Ако су x и y природни бројеви, решити једначину $6^x - y! = 192$.

188. Одредити природне бројеве x и y такве да је $x! + 5^y = 131$.

189. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x! + y! = 5046$.

190. Решити једначину $x! + 3 = p^2$, ако је x природан, а p прост број.

191. Користећи дату таблицу, одредити да ли постоје природни бројеви x и y такви да једначина $x! + 9^y = 12345678$ има решења?

$9^y \downarrow$	$x! \rightarrow$						

192. Решити једначину $x! + y^2 = 1297$, ако су x и y природни бројеви.

193. Доказати да једначина $x^2 + y! = 333\ 333$ нема решења ако су x и y природни бројеви.

194. Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + z! = 999\ldots999$ (999 деветки) ?

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

195. Постоје ли природни бројеви x, y и z такви да је $5^x + 6^y + z! = 999\ldots999$ (2006 деветки) ?

196. Одредити све природне бројеве x и y такве да је $x! + y^4 = 10024$.

197. Одредити природне бројеве x и y тако да је $1! + \ldots + x! = y^2$. Колико има решења?

198. Ако су x, y и z природни бројеви, да ли је једначина $x! + 2y^4 + 5^z = 9876543210$ има решења.

2.5. НЕКЕ ПРИМЕНЕ МЕТОДЕ ПОСЛЕДЊЕ ЦИФРЕ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

199. Мерни број ивице коцке је природан број. Може ли мерни број површина коцке бити 1998?

200. У равни је дато n тачака од којих никоје три не припадају истој правој. За које n, је датим тачкама одређена 231 права?

201. Може ли конвексан многоугао имати 11111 дијагонала?

202. Постоје ли прости бројеви p, q и r такви да је $2^p + q^4 = r!$?

203. Дато је n тачака у простору, при чему никоје четири тачке не припадају истој равни. Милан је израчунао да дате тачке одређују 5432 равни. Да ли је Миланова рачуница исправна?

204. Словослагач је расуо цифре 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 9. Испоставило се да су то цифре шестог степена природног броја n. Одредити број n.

205. Јанко је сабирао првих n парних природних бројева и добио збир 987 654. Мара је сабрала првих к непарних природних бројева и добила збир 34 567. Да ли су они тачно извршили сабирање?

206. Брат и сестра су Гаусовим поступком рачунали збир првих n природних бројева и добили резултате који су се разликовали само у последњој цифри. Брат је тврдио да је последња цифра 4, а сестра да је последња цифра 8. Ко је био у праву?

207. Одредити природан број n, ако је збир бројева $1 + 2 + 3 + ... + n$ троцифрени природни број чије су све цифре једнаке.

208. Постоји ли двоцифрени природни број који је једнак збиру факторијела својих цифара?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

209. Доказати да број $172^{1980} + 7$ не може бити квадрат целог броја. (Кијевска МО – 1980).

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

210. Постоји ли двоцифрени природни број који је једнак збиру факторијела својих цифара? Одредити све троцифрене природне бројеве који су једнаки збиру факторијела својих цифара.

211. Ако је x природан број одредити да ли је могућа једнакост: $x^8 + (x+1)^8 +...+ (x+99)^8 = 876543210$.

212. Да ли се број облика $10^к – 1$ може приказати као збир факторијела два природна броја?

213. Да ли постоје три узастопна природна броја чији је збир квадрата једнак четвороцифреном броју чије су све цифре једнаке? Да ли постоје три узастопна непарна природна броја чији је збир квадрата једнак четвороцифреном броју чије су све цифре једнаке?

4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА МЕТОДОМ АЛГЕБАРСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

У овом поглављу, на сличан начин као код елементарних Диофантових једначина и коришћења последње цифре, систематизује се у могућој мери решавање Диофантових једначина коришћењем алгебарских трансформација. Наиме алгебарске трансформације су средство којим се полазна Диофантова једначина доводи на еквивалентан облик погодан за дискусију, тј. за разликовање случајева. Како то конкретно изгледа и када се као средство користи производ, количник, збир, неједнакост, парност, дељивост или нешто друго, најбоље илуструју следећи примери и проблеми који се предлажу за самосталан рад и истраживање.

4.1. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПРОИЗВОДА

Као инструмент за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина често се користи производ. Први корак у решавању је трансформација бар једне стране једначине (зависно од случаја) у облик погодан за факторизацију како леве, тако и десне стране једнакости. Најповољнија ситуација је уколико се на једној страни једнакости израз који садржи промењливе факторизује на чиниоце, а на другој страни једнакости факторизује константа. Примери који следе најбоље илуструју коришћење производа ради лакшег раздвајања случајева.

<u>ПРИМЕР 34.</u> *Одредити све целе бројеве х и у који задовољавају једнакост* $xy + 3y - 5x = 18$.

РЕШЕЊЕ: Једначина $xy + 3x - 5y = 18$ еквивалентна је са једначином $xy + 3y - 5x - 15 = 3$, односно $(x + 3)(y - 5) = 3$. Како је број 3 прост број, разликују се следеће могућности:

1) $x + 3 = 1,\ y - 5 = 3 \Rightarrow x = -2,\ y = 8$;
2) $x + 3 = -1,\ y - 5 = -3 \Rightarrow x = -4,\ y = 2$;
3) $x + 3 = 3,\ y - 5 = 1 \Rightarrow x = 0,\ y = 6$;
4) $x + 3 = -3,\ y - 5 = -1 \Rightarrow x = -6,\ y = 4$. Δ

Производ се успешно користи нарочито у случајевима када једна од страна једнакости представља производ простих бројева, без обзира да ли се ради о константама или променљивим. Илустрација таквог једног случаја је следећи пример.

<u>*ПРИМЕР 35.*</u> *Одредити све просте бројеве p тако да је 2p + 1 седми степен неког природног броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени природни број n. Према условима задатка је $2p + 1 = n^7$, тј. $n^7 – 1 = (n – 1)(n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) = 2p$. Како су 1, 2, p и 2p једини чиниоци броја 2p, то су могући следећи случајеви:

1) Ако је $n - 1 = 1$, онда је $n = 2$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 2p = 127$, што није могуће, јер је 2p паран, а 127 непаран број ;

2) Ако је $n – 1 = 2$, онда је $n = 3$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1093 = p$. Како је 1093 прост број, то је уређени пар (3, 1093) једно решење проблема.

3) Ако је $n – 1 = p$, онда је $n = p + 1 \geq 3$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 \geq n + 1 \geq 3$, што значи да у овом случају нема решења.

4) Ако је $n – 1 = 2p$, онда је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n = 0$. Претходна једначина има једина реална решења $n = 0$ или $n = -1$, па проблем опет нема решења, јер 0 и –1 нису природни бројеви. Δ

<u>*ПРИМЕР 36.*</u> *Одредити све природне бројеве x такве да је $2^x + 1$ квадрат природног броја.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $2^x + 1 = y^2$, онда је $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1) = 2^x$. Једини чиниоци броја 2^x су степени броја 2. Нека је $2^x = 2^a \cdot 2^b$ $(a \geq b)$, где је $a + b = x$. Тада је $y + 1= 2^a$ и $y - 1 = 2^b$, па је $2^a - 2^b = 2$. Следи да је $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$. Јасно је да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} - 1 = 1$, па је $b = 1$ и $a - b = 1$. Дакле $a = 2$, $b = 1$ и $x = a + b = 3$. Према томе је $2^3 + 1 = 9 = 3^2$, па је $y = 3$. Δ

<u>*ПРИМЕР 37.*</u> *Доказати да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n.*

РЕШЕЊЕ: Како је $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) = (n + 1)^2 (n^2 + 1)$, то је добијени број потпун квадрат само ако је $n^2 + 1$ потпун квадрат, то јест $n^2 + 1 = a^2$. Тада је $a^2 - n^2 = 1$, тј. $(a - n)(a + n) = 1$. Следи да је $a - n = a + n = 1$, одакле је $a = 1$ и $n = 0$, што није могуће, јер $n = 0$ није природан број. Δ

ПРИМЕР 38. *Решити једначину* $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ *у скупу целих бројева.* [8]

РЕШЕЊЕ: Погодним множењем израза добија се да је дата једначина еквивалентна са једначином $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$. Множењем са 4 добија се $(2x^2 + 16x + 7 - 7)(2x^2 + 16x + 7 + 7) = 4y^2$, а даљом трансформацијом $(2x^2 + 16x + 7)^2 - 49 = 4y^2$, па је $(2x^2 + 16x + 7)^2 - (2y)^2 = 49$. Одавде се добија производ $(2x^2 + 16x + 7 - 2y)(2x^2 + 16x + 7 + 2y) = 49$. Разликују се следећи случајеви:

1) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 49$;

2) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 7$;

3) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 1$;

4) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -49$;

5) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -7$;

6) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -1$.

Из добијених система једначина следе следећи системи квадратних, односно линеарних једначина:

- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x - 9 = 0$ и $y = 12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x - 9 = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x + 16 = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x + 7 = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x + 16 = 0$ и $y = 12$.

Сва решења дате Диофантове једначине су: (-9, 12); (1, 12); (0, 0); (-8, 0);(-9, -12); (1, -12); (-4, -12); (-7, 0); (-1, 0); (-4, 12).

Последњи задатак показује како се алгебарским трансформацијама наизглед сложена једначина може довести до производа два израза, а потом његовом анализом до такорећи најелементарнијих система једначина.

8 Проблем је са математичке олимпијаде у бившој ДДР – 1973. године. Видети књигу: И.Н. Сергеева: Зарубежные математические олимпиады – Наука, Москва, 1987.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

214. Одредити све уређене парове (x,y) целих бројеве x и y за које је $xy + 2x = 7$.

215. Ако су x и y цели бројеви решити једначину $x^2 - y^2 = 12$. Колико таквих бројева има?

216. Одредити све парове целих бројева (x,y) такве да је:
a) $x^2 - 7 = 2xy$; b) $x^4 - y^4 = 15$;
c) $6x^2 - 13xy + 6y^2 = 4$; d) $x^2 + 6y = y^2 + 4x + 10$.

217. Одредити све уређене парове (x,y) целих бројеве x и y за које је $xy + 2x = 7$.

218. Одредити природан број n и прост број p тако да је $p = n^4 + 4$.

219. Одредити природан број n тако да је $n^2 + 2n + 13$ квадрат неког природног броја.

220. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?

221. Одредити природан број n и прост број p тако да је $5p + 1 = n^2$.

222. Постоји ли прост број p и цео број n тако да се прост број може приказати у облику $8n^2 + 10n + 3$?

223. Одредити све парове целих бројева x и y тако да је њихов производ 5 пута већи од њиховог збира .

224. Одредити све правоугле троуглове са целобројним страницама чија је једна катета a = 9 cm.

225. Постоје ли прост број p и природан број к за које је $3p + 1 = к^3$?

226. Одредити целе бројеве a, b и c такве да је $abc + ab = a + ac + 3$.

227. Постоје ли прост број p и природан број к такви да је $к^3 - 3к = p - 2$?

228. Ако су n и m природни и p прост број решити следеће једначине:
a) $2p^2 + 1 = n^5$; b) $n^4 + n^2 + 1 = p$;
c) $n^4 + 4m^4 = p$.

229. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ има бесконачно много решења. Доказати.

230. Доказати да ако су x и y природни бројеви и ако је $x \le y$, онда једначина $xy + x + y = 2^{32}$ има само једно решење.

231. Ако је m природан број, онда једначина $x^2 + 2xy + y^2 - mx - my - m = 1$ има тачно m решења у скупу природних бројева. Доказати.

232. Доказати да једначина $x(x + 1) = 4y(y+1)$ нема решења у скупу природних бројева и има бесконачно много решења у скупу позитивних рационалних бројева. Колико решења има дата једначина у скупу целих бројева?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

233. Ако је p непаран прост број, а x и y природни бројеви тако да је $x > y$, онда једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p}$ има само једно решење. (Мађарска - 1931.)

234. Дужина једне катете правоуглог троугла је 21, а дужине осталих двеју страница су природни бројеви. Колико има таквих троуглова. Одредити њихове странице? (Србија 1971.)

235. Дата је једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$. Ако је p прост број онда је број решења једначине једнак 3, а ако је p сложен број, онда је број решења једначине већи од 3. Доказати. (36. ММО 1973.)

236. Одредити све парове (x, y) целих бројева таквих да задовољавају једнакост $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$. (ДР Немачка 1974.)

237. Решити једначину $2(x^2 - y^2) = 1978$, где су x и y природни бројеви. (Србија 1978.)

238. Одредити све природне бројеве који се не могу представити у облику збира неколико (најмање два) узастопних природних бројева. (Србија - 1978).

239. Одредити све парове целих бројева (x, y) који задовољавају једначину $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$. (41. ММО 1978.)

240. Одредити сва целобројна решења једначине $xy = x + y + 1$. (Србија 1987.)

241. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p^2 - 2q^2 = 1$. (Србија 1990.)

242. Одредити све целе бројеве x и y за које је $xy + x - 3y = 10$. (Србија 1991.)

243. На колико начина се број 1991 може представити у облику збира узастопних природних бројева. (Србија 1991.)

244. Доказати да једначина $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$ има јединствено решење у скупу природних бројева, ако и само ако је n пост број. (Србија 1991.)

245. Постоје ли цели бројеви n и к такви да је $n^3 - n + 2^n = 1992к$? (Србија 1992.)

246. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $2x^2 - y^2 = y^2 + 1994$. (Србија 1994.)

247. Одредити природан број n такав да када му се дода 2 или одузме 7, добија се квадрат целог броја. (СРЈ 1993).

248. Одредити све природне бројеве облика $\overline{222...222}$ који се могу представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја. (Србија 1996.)

249. Одредити све тројке целих бројева (x, y, z) ако је $x + y + z = 0$ и $x^3 + y^3 + z^3 = -18$. (Србија 2000.)

250. Природан број n је такав да су бројеви 2n + 1 и 3n + 1 квадрати природних бројева. Доказати да је број 5n + 3 сложен. (СРЈ 1996.)

251. Одредити све природне бројеве n за које је вредност израза $n^2 + 2n + 1997$ квадрат неког природног броја. (Србија 1997.)

252. Одредити цифре x, y и z тако да у декадном систему важи једнакост $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}$. (СРЈ 1997.)

253. Одредити све природне бројеве n такве да је вредност израза $n^2 + 2n + 2000$ квадрат неког природног броја. (Србија 2000.)

254. Нека је m дати цео број. Доказати да постоји бар један пар (x, y) целих бројева тако да важи $2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m$. (Србија 1999.)

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

255. Ако је n цео, а p прост број решити једначину $n^5 + n^4 + 1 = p$.

256. Одредити све целе бројеве x, y и z који испуњавају једнакост $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 6$.

257. Постоје ли цели бројеви a, b, c и d такви да је $ab + cd = 14$ и $ac + bd = 11$?

258. Одредити природне бројеве к, n и m тако да је:

a) $1! \cdot 2! \cdot ... 99! \cdot 100! = n! \cdot m^2$;

b) $1! \cdot 2! \cdot ... (k\text{-}1)! \cdot k! = n! \cdot m^2$.

4.2. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОЛИЧНИКА

Један од начина за раздвајање случајева је и коришћење количника и анализа његове целобројности. Идеја је да се једначина A = B, низом трансформација преведе у облик $M = N + \dfrac{P}{Q}$. Ако су M и N цели бројеви, онда то мора бити и $\dfrac{P}{Q}$, што значи да се Q мора садржати у P. Анализом могућности у којима се то догађа, без обзира да ли су је Q број или неки алгебарски израз долази се до логичке основа за раздвајања свих могућих случајева.

<u>*ПРИМЕР 39.*</u> *Одредити све целе бројеве x и y који задовољавају једнакост* $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$ трансформише у облик $x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x + 3)$, онда постоје две могућности:

1) Ако је $x = -3$, онда је $x^2 + 2x - 6 = -3$, а $y(x + 3) = 0$, па $x = -3$ није решење једначине ;

2) Ако је $x \neq -3$, онда је $y = \dfrac{x^2+2x-6}{x+3} = x - 1 - \dfrac{3}{x+3}$. Како y мора бити цео број разликују се следеће могућности:

2.1) $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2,\ y = -6$;

2.2) $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4,\ y = -2$;

2.3) $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0,\ y = -2$;

2.4) $x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6,\ y = -6$. Δ

<u>*ПРИМЕР 40.*</u> *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је p(x + y) = xy, при чему је p неки прост број.*

РЕШЕЊЕ: Из $p(x + y) = xy$ добија се $px = xy - py = y(x - p)$. Сада је јасно да су могућа два случаја:

1) Ако је $x = p$, онда је $p^2 = 0$, или $p = 0$, што није могуће ;

2) Ако је $x \neq p$, онда је $y = \dfrac{px}{x-p} = \dfrac{px - p^2 + p^2}{x-p} = p + \dfrac{p^2}{x-p}$.

3) Да би број y био природан то p^2 мора бити дељиво са x - p, па се, с обзиром да је p прост број, разликују три могућности:

3.1) $x - p = 1 \Rightarrow x = p + 1,\ y = p^2 + p$;

3.2) $x - p = p \Rightarrow x = 2p,\ y = 2p$;

3.3) $x - p = p^2 \Rightarrow x = p^2 + p,\ y = p + 1.\Delta$[9]

Ова једначина је била веома присутна на математичким такмичењима, додуше у форми одредити природне бројеве x и y чији је производ 2, 3, 5, ... p пута већи од њиховог збира. Интересантно за истраживање је колико решења има дати проблем за ма који природан број p. [9]

<u>*ПРИМЕР 41.*</u> *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Из услова задатка се добија да је $10x + y = (x + y)^2$ или $9x + (x + y) = (x + y)^2$. Како је $x \neq 0$, то је и $(x + y) \neq 0$, па се деобом добијене једнакости са $(x + y)$ добија једнакост:

$$\frac{9x}{x + y} + 1 = x + y.$$

Ако је највећи заједнички делилац за x и y једнак d, онда постоје узајамно прости бројеви a и b такви да је $1 \leq x = ad \leq 9$ и $0 \leq y = bd \leq 9$. Тада једначина постаје $\dfrac{9ad}{(a + b)d} + 1 = (a + b)d$ или $\dfrac{9a}{a + b} + 1 = (a + b)d$.

Како количник $\dfrac{9a}{a + b}$ мора бити природан број и како су a и (a + b) узајамно прости, то су могућа три случаја:

---

[9] Препоручујемо да се сви ови задаци реше и на други начин, јер оба претходна задатка се елегантно решавају и коришћењем производа

1) Ако је $a + b = 1$, онда је $9a + 1 = d$. Овај случај је немогућ, јер из $a + b = 1$ следује, због $x \neq 0$, да је $a = 1$, $b = 0$. У том случају је $d = 10$, што није могуће, јер је $d \leq 9$.

2) Ако је $a + b = 3$, онда је $3a + 1 = 3d$. И овај случај није могућ, јер добијена једначина нема целобројних решења.

3) Ако је $a + b = 9$, онда је $a + 1 = 9d$ или $a = 9d - 1$. Како је $1 \leq x \leq 9$, то је $1 \leq x = ad = (9d - 1)d \leq 9$, па је $d = 1$. То значи да је $a = 8$ и $b = 1$.

Дакле тражени број је 81 ($= (8 + 1)^2$).

ПРИМЕР 42. *Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени троцифрени бројеви x и y и нека је број x дописан броју y са леве стране. Тада због услова задатка, тј. дописивања броја x до броја y, важи једнакост: $1000x + y = 3xy$. Како је $y \neq 0$, дељењем једнакости са x добија се једнакост $1000 + \frac{y}{x} = 3y$. Очигледно је да је број y дељив са бројем x, па је $y = кx$ ($к \in N$). Добија се $1000 + к = 3кx$, или $к(3x - 1) = 1000$. Како је x троцифрен број, то је $x \geq 100$, па је $3x \geq 300$, а $3x - 1 \geq 299$. Како су делиоци броја 1000 већи од 299 само бројеви 1000 и 500, то постоје само две могућности:

1) $3x - 1 = 1000$, или $3x = 1001$, што није могуће, јер 1001 није дељиво са 3.

2) $3x - 1 = 500$, или $3x = 501$, а $x = 167$. Тада је $3y - 1000 = 2$, па је $y = 334$.

Тражено множење је $3 \cdot 167 \cdot 334 = 167334$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

259. Доказати да једначина $3x + 33y + 333z = 2006$ нема целобројних решења.

260. Одредити све целе бројеве који се могу приказати у облику разломка $\frac{a^2 + 2}{a - 1}$ где је a цео број различит од 1.

261. Одредити све парове целих бројева x и y за које важи једнакост $x(y + 1)^2 = 243y$.

262. Решити једначину $xy + 7x - 3y = 23$, ако су x и y цели бројеви.

263. Одредити све парове целих бројева x и y тако да је $x^2y = y^3 + 10$.

264. Одредити све парове целих бројева x и y тако да је њихов производ 13 пута већи од њиховог збира.

265. Одредити све природне бројеве x и y који су решења једначине $y^4 + x = xy + 9$.

266. Дата је једначина $3x + 11y = 2000$. Ако су x и y цели бројеви, онда једначина има бесконачно много решења. Доказати.

267. Колико има парове (x, y) природних бројева таквих да је испуњена једнакостз $5x + 9y = 127$.

268. Постоји ли двоцифрен природан број који је једнак збиру квадрата својих цифара?

269. Одредити све двоцифрене бројеве који су дељиви производом својих цифара.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

270. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара. (Србија 1974.)

271. У дувачком оркестру музичари су били постројени у облику квадрата (n редова са по n музичара), а затим се престројили у правоугону формацију (n + 5 редова са m музичара). Колико је музичара било у оркестру. (Србија 1991.)

272. Одредити све целе бројеве x за које је $\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 10}{x + 2}$ природан број. (Хрватска – 1993.)

273. Да ли се првих 100 природних бројева могу поделити у три групе, тако да је збир бројева прве групе дељив са 102, збир бројева друге групе дељив са 203, а збир бројева треће групе дељив са 304? (Србија 2001.)

274. Кифла кошта пола динара, погачица 2 динара, а ђеврек 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 пецива? (Србија 2000.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

275. Одредити сва целобројна решења једначине: $xy + 1 = x^3 + y$. Колико решења има?

276. Постоје ли три узастопна непарна природна броја чији је збир квадрата четвороцифрени број са међусобно једнаким цифрама?

277. Постоји ли прост број p који се може приказати у облику $\frac{n^3+5}{n^2+1}$, ако је n природан број.

278. Ако је p дати прост број, одредити све уређене тројке (x, y, z) природних бројева тако да испуњавају једнакост $xyz = p(x + y + z)$.

4.3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ЗБИРА

Један од начина за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина је и анализа збира. Најчешће та анализа почива на трансформацији дате једначине у облик који је погодан за разматрање случајева. Један од најпогоднијих таквих облика је збир квадрата, или још општије, збир ненегативних сабирака.

ПРИМЕР 43. *У скупу целих бројева решити једначину $x^4 + y^{2006} = 2x^2 - 1$.*

РЕШЕЊЕ: Како је дата једначина $x^4 + y^{2006} = 2x^2 - 1$ еквивалентна са једначином $(x^2 - 1)^2 + (y^{1003})^2 = 0$ и како је збир квадрата два цела броја једнак 0 ако и само ако су оба броја једнака 0, то је могућ само један случај: $x^2 - 1 = 0$ и $y = 0$. Дакле, решења дате једначине су: (1, 0) или (-1,0). Δ

ПРИМЕР 44. *Одредити све целе бројеве x и y тако да задовољавају једначину: $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.*

РЕШЕЊЕ: Трансформацијом дате једначине $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$ добија се њој еквивалентна једначина $(x^2 - 3)^2 + (y^2 - 7)^2 = 5$. Како је збир два квадрата једнак 5 само ако је један од њих 1, а други 4, разликују се следеће могућности:

1) $(x^2 - 3)^2 = 1$ и $(y^2 - 7)^2 = 4$. Дакле, $|x^2 - 3| = 1$ и $|y^2 - 7| = 2$. Како једначине $x^2 = 2$ и $y^2 = 5$ немају решења у скупу целих бројева то је $x^2 = 4$ и $y^2 = 9$, а тражена решења су уређени парови бројева $(x, y) \in \{(2,3); (2, -3); (-2, 3); (-2, -3)\}$.

2) $(x^2 - 3)^2 = 4$ и $(y^2 - 7)^2 = 1$. Следи $|x^2 - 3| = 2$ или $|y^2 - 7| = 1$. Како једначине $y^2 = 8$ и $y^2 = 6$ немају решења у скупу целих бројева то једначина у овом случају нема целобројних решења. Δ

У оба претходна примера разликовање случајева је обављено трансформацијама једне стране дате једначине у збир квадрата које су биле релативно очигледне. У наредним примерима трансформације нису очигледне.

<u>*ПРИМЕР 45.*</u> *Постоје ли цели бројеви x и y који задовољавају једнакост* $x^2 + xy + y^2 = 1$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина помножи са 2 добија се еквивалентна једначина $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ или $x^2 + (x + y)^2 + y^2 = 2$. Збир квадрата три броја је једнак 2, ако су два од тих бројева по 1, а трећи 0, па се разликују три могућности:

1) $x^2 = 1$, $(x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 0$. Следи да је $y = 0$, а $x^2 = 1$, па су решења $(1, 0)$ или $(-1, 0)$.

2) $x^2 = 1$, $(x + y)^2 = 0$ и $y^2 = 1$. Како је $x + y = 0$, а $|x| = 1$ и $|y| = 1$, то су решења $(1, -1)$ или $(-1, 1)$.

3) $x^2 = 0$, $(x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 1$. Следи да је $x = 0$, а $y^2 = 1$, па су решења $(0, 1)$ или $(0, -1)$.

Сва решења дате једначине су: $(1, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, -1)$; $(-1, 1)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$. Δ

Трансформација дате Диофантове једначине у збир је плодотворно и код Диофантових проблема. Наредни пример то најбоље илуструје.

<u>*ПРИМЕР 46.*</u> *Одредити све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају остатак једнак збиру квадрата својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{abc}$. Како је $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(9a + b) + a - b + c$, то је остатак при дељењу траженог броја са 11 једнак $a - b + c$.

Према условима задатка је $a - b + c = a^2 + b^2 + c^2$, тј. $a^2 + b^2 + c^2 - a + b - c = 0$. Множењем добијене једнакости са 2 добија се $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2b - 2c = 0$ или $a^2 + b^2 + c^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 3$.

Јасно је да једначина има решења ако су три од датих сабирака једнаки 0, а преостала три једнака 1. Како је $\overline{abc}$ троцифрен број, то је $a \geq 1$, па је $a = 1$.

Слично је $b \geq 0$, па је $b + 1 \geq 1$ и због тога је $b = 0$ и $b + 1 = 1$. На основу тога је $a^2 + b^2 + c^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 1 + 0 + c^2 + 0 + 1 + (c - 1)^2 = 3$, па се разликују два случаја:

1) $c = 0$ и $(c - 1)^2 = 1$.

2) $c = 1$ и $(c - 1)^2 = 0$.

Тражени бројеви су очигледно 100 и 101. Δ

Дати проблем се може решити и другачијим разматрањем случајева, јер остатак при дељењу броја $\overline{abc}$ са 11 је $a^2 + b^2 + c^2$. Према томе $0 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 10$, што значи да је свака од цифара a, b и c мања или једнака 3, а збир квадрата све три цифре је мањи или једнак 10. Дакле у обзир долазе само бројеви: 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 130, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 300, 301 и 310. Појединачном провером остатка при дељењу сваког од бројева са 11 и збира квадрата цифара се утврђује да услове задатка испуњавају само бројеви 100 и 101. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

279. Одредити све парове целих бројева x и y за које је:

a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 1$;

c) $x^2 + y^2 = 2$; d) $x^2 + y^2 = 3$;

e) $x^2 + y^2 = 4$; f) $x^2 + y^2 = 10$.

280. Постоје ли цели бројеви x и y за које важи једнакост $x^2 + y^4 = 2x - 1$?

281. Одредити целе бројеве x и y тако да је $4x^2 + y^2 = 12x + 4y - 12$.

282. Решити једначина $x^4 + y^2 + 2y = 1$, ако су x и y цели бројеви.

283. Постоје ли цели бројеви x, y, z такви да је $x^2 + 4y^2 + z^4 = 2x - 20y - 23$?

284. Да ли једначина $p^2 + q^2 = r$ има решење, ако су p, q и r прости бројеви? Да ли је број решења дате једначине коначан или бесконачан?

285. Доказати да једначина $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ нема решења у скупу целих бројева.

286. Дата је једначина $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = n$. Одредити најмању вредност природног броја n за коју дата једначина има решења у скупу: а) целих бројева; b) природних бројева.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

287. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $x^2 - xy + y^2 = x + y$. (7. ММО 1941.)

288. Одредити све целе бројеве a, b и c који задовољавају неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$. (Мађарска – 1965.)

289. У скупу природних бројева решити систем једначина: $x + y = zt$ и $z + t = xy$. (29. ММО 1966.)

290. Ојлеров задатак: Доказати да се сваки број облика 2^n ($n \in N$ и $n \geq 3$) може приказати као збир $7x^2 + y^2$, где су x и y непарни природни бројеви. (48. ММО 1985.)

291. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева . (Србија 1990.)

292. Одредити природне бројеве x и y ($x > y$), за које је збир бројева $x + y$, $x - y$, xy и $x:y$ једнак 245. (Србија 1992.)

293. Одредити све парове природних бројева (m, n) природних бројева за које је $\dfrac{n^3 + 1}{mn - 1}$ цео број. (35. ИМО – Хонгконг 1994.)

294. Дата је једначина $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. Доказати да дата једначина има бесконачно много целобројних решења. (Србија 1995.)

295. Одредити све природне бројеве облика 222...222 који се могу приказати као збир квадрата или разлика квадрата два природна броја. (Србија 1996.)

296. Нека су $x_1, \ldots x_{1998}$ цели бројеви за које важи једнакост $x_1^2 + \ldots + x_{1997}^2 = x_{1998}^2$. Доказати да су бар два од тих бројева парни. (ЈМБО 1997.)

297. У скупу целих бројева решити систем једначина: $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. (Србија 2002.)

298. У скупу целих бројева решити једначину $2m^2 + n^2 = 2mn + 3n$. (Србија 2003.)

299. Одредити све целе бројеве x, y, z и t такве да важи једнакост $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$. (Србија 2004.)

300. Одредити све парове целих бројева x и y за које важи једнакост $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$. (Србија 2005.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

301. Да ли једначина је $x^2 + y^2 + z^2 = 2006$ има решења у скупу целих бројева?

302. Дата је једнакост $x_1^2 + x_2^2 +...+ x_{2000}^2 = 2(x_1 + x_2 +...+ x_{2000}) - 1999$. Одредити бројеве $x_1, x_2, ... x_{2000}$.

303. Ако једначина $p^2 + q^2 = r$ $(q > 5)$ има решење у скупу простих бројева, онда је $r = 10к + 3$ $(к\in N)$. Доказати.

304. Испитати за које вредности природног броја к једначина $x^2 + y^2 + z^2 = к$ има, а за које нема целобројних решења по x, y и z .

305. Да ли систем једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = x_1x_2 ... x_к = 2006$ има решења у скупу природних бројева?

4.4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ НЕЈЕДНАКОСТИ

Често се као један од начина за раздвајање случајева употребљавају и неједнакости. Неједнакости се користе, како је већ у неким примерима приказано, да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. Потом се једначина, неким од већ изложених поступака, решава у преосталом делу области дефинисаности. Најбоље је при том, уколико је могуће, елиминисати бесконачни део области дефинисаности, а једначину потом решавати у коначном скупу.

<u>ПРИМЕР 47.</u> Постоји ли четвороцифрен природан број који је једнак четвртом степену збира својих цифара ?

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{abcd}$. Тада је према датим условима $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^4$. Како је $5^4 < 1000 \le \overline{abcd} < 10^4$, закључује се да је $5 < a + b + c + d < 10$. Дакле, $a + b + c + d$ је 6, 7, 8 или 9. Како је $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ и $9^4 = 6561$, јасно је да услове задатка испуњава само број $2401 = 7^4$, јер је у свим осталим случајевима збир цифара већи од 9.

ПРИМЕР 48. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка тада је $\overline{ab} = 10a + b = a^3 + b^2$. Како је $\overline{ab} = 10a + b \le 99$ то је и $a^3 + b^2 \le 99$, па је $1 \le a \le 4$. Трансформацијом дате једначине добија се $10a - a^3 = b^2 - b$ или $a(10 - a^2) = b(b - 1)$. С обзиром да је $b(b - 1)$, као производ узастопних природних бројева, паран број, то је и $a(10 - a^2)$ паран број.

То значи да је и a паран број. Како је $a(10 - a^2) \ge 0$, то је $10 - a^2 \ge 0$, тј. $a \le 3$. Једини парни број мањи или једнак 3 је $a = 2$. Тада је $a(10 - a^2) = b(b - 1) = 12$, што значи да је $b = 4$. Дакле, тражени број је 24 ($= 2^3 + 4^2$). Δ

У претходном примеру са две неједнакости, број случајева је са 90 сведен на само један, чиме је метод показао своју ефикасност. У наредном примеру приказаће се како се бесконачни скуп могућих решења, коришћењем неједнакости може свести на мали број могућих случајева.

ПРИМЕР 49. Одредити све природне бројеве чија је вредност једнака збиру квадрата његових цифара у децималном запису.

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је тражени број x једноцифрен, онда је $x = x^2$, па је $x = 1$.

2) Уколико је тражени број двоцифрен онда је $10x + y = x^2 + y^2$, што је еквивалентно са $x(10 - x) = y(y - 1)$. Како је $y(y - 1)$ паран број, то је и x парна цифра. За $x \in \{2, 4, 6, 8\}$ број $x(10 - x)$ је једнак или 18 или 24, а они очигледно не представљају производ два узастопна природна броја.

3) Ако је тражени број троцифрен, онда је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$. Како је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \le 3 \cdot 81 = 243$, то је $x = 1$ или $x = 2$.

3.1) Ако је $x = 1$, онда је $100 + 10y + z = 1 + y^2 + z^2$ или после сређивања $99 + 10y + z = y^2 + z^2$. Како је $99 > z^2$ и $10y > y^2$, то је лева страна увек већа од десне па једначина нема решења.

3.2) Ако је x = 2, онда је $200 + 10y + z = 4 + y^2 + z^2$. Лева страна једнакости је увек већа од 200, а десна увек мања од 200, па једначина нема решења.

4) Уколико је број цифара већи од 3 и једнак к, онда је тражени број увек већи од $10^{к-1,}$ а збир квадрата његових цифара мањи од 100к, па је једнакост могућа само ако је $10^{к-1} \leq 100к$, или $10^{к-3} \leq к$, што је немогуће, јер добијена неједнакост не важи ни за једно к веће од 3. Δ

<u>ПРИМЕР 50.</u> Постоје ли природни бројеви a, b, c, d такви да је $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$ *?*

РЕШЕЊЕ: Не умањујући општост расуђивања, због симетричности једначине, може се претпоставити да је $1 < a \leq b \leq c \leq d$. Тада је $\frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{a^2}$, па је $\frac{4}{d^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1 \leq \frac{4}{a^2}$. Следи да је $a^2 \leq 4$, па је a = 2, јер a не може бити 1. На сличан начин сада је $\frac{3}{d^2} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{b^2}$. Закључак је $b^2 \leq 4$, одакле је b = 2. Остаје $\frac{2}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{4} \leq \frac{2}{c^2}$, па је $c^2 \leq 4$, односно c = 2. Јасно је да је тада и d = 2, па је једино решење дате једначине a = b = c = d = 2.Δ

<u>ПРИМЕР 51.</u> Постоје ли природни бројеви x, y, z такви да важи једнакост x! + y! = z!?

РЕШЕЊЕ: Како је $x! + y! = z!$ и како је $x! \geq 1$ и $y! \geq 1$, то је очигледно $x < z$ и $y < z$. Тада је $x! + y! = z! = z(z - 1)...(y + 1)y(y - 1)...3\cdot 2\cdot 1 = z(z - 1)...(y + 1)\cdot y!$.

Значи да је $x\,! = z(z - 1)...(y + 1)\cdot y! - y! = y!\,(\,z(z - 1)...(y + 1) - 1)$. Разликују се три случаја:

1) Ако је $x < y$, онда је и $x! < y!$, па једначина нема решења ;

2) Ако је $x = y$, онда је $z(z - 1)...(y + 1) - 1 = 1$, па је $z(z - 1)...(y + 1) = 2$ што значи да је $z = 2$. Тада је $x = y = 1$.

3) Ако је $x > y$, онда је $x \geq 2$ и $x! = x(x - 1)...(y + 1)\ y! = y!\,(z(z - 1)...(y + 1) - 1)$.

После дељења са y! добија $x(x - 1)...(y + 1) = (z(z - 1)...(y + 1) - 1$. Како је лева страна увек парна, а десна непарна, једначина нема решења.

Према томе једино решење је $x = y = 1$ и $z = 2$. Δ

<u>ПРИМЕР 52.</u> Једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $1 \le x \le y$, онда је дата једначина еквивалентна са $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$. Тада је $x^2 \le xy \le y^2$, па је $\frac{1}{y^2} \le \frac{1}{xy} \le \frac{1}{x^2}$. Сада је $\frac{3}{y^2} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1 \le \frac{3}{x^2}$, па је очигледно $x^2 \le 3$, што значи да је $x = 1$. Како је за $x = 1$, $y = - 1$, то у овом случају нема решења.

2) Ако је $1 \le y \le x$, онда се аналогно доказује да једначина и у овом случају нема решења.

<u>ПРИМЕР 53.</u> Одредити све уређене тројке (x, y, z) природних бројева x, y и z, таквих да је $xy + yz + zx - xyz = 2$.

РЕШЕЊЕ: Примећује се да је једначина симетрична па се разматрање може извести по једној променљивој, на пример x. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 1$, онда једначина постаје $y + yz + z - yz = y + z = 2$, па је (1, 1, 1) једно решење једначине.

2) Ако је $x = 2$, онда је $2y + yz + 2z - 2yz = 2y - yz + 2z = 2$. Следи да је $yz - 2y - 2z + 4 = (y - 2)(z - 2) = 2$, а то значи да постоје два решења: $y - 2 = 1$, $z - 2 = 2$ или $y - 2 = 2$, $z - 2 = 1$. Дакле могућа решења су (2, 3, 4) ; (2, 4, 3) ; (3, 2, 4) ; (3, 4, 2) ; (4, 2, 3) ; (4, 3, 2).

3) Ако је $x > 2$, $y > 2$ и $z > 2$, онда важе неједнакости: $xyz \ge 3xy$, $xyz \ge 3yz$ и $xyz \ge 3zx$. Сабирањем ових неједнакости добија се да је $3xyz \ge 3xy + 3yz + 3zx$, па је $xyz \ge xy + yz + zx$ или $2 = xy + yz + zx - xyz \le 0$, што је немогуће. Δ

<u>ПРИМЕР 54.</u> Постоје ли цели бројеви x и y такви да испуњавају једнакост $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

РЕШЕЊЕ: Пре него што се крене у процене леве, односно десне стране једначине, неопходно је трансформисати једначину у облик погодан за ефикасну анализу. Множењем једначине са 4 и додавањем броја 1 и на леву и на десну страну једначине добија се једнакост $4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$. Следи да је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + 4y^3 + y^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1)$. Слично је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + y^2 + 4 + 4y^3 + 8y^2 + 4y - 5y^2 - 3 = (2y^2 + y + 2)^2 - 5y^2 - 3$.

Дакле, $(2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1) = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 2)^2 - (5y^2 + 3)$.

Сада се разликују две могућности:

1) Ако је $y = -1$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2) Ако је $y \neq -1$, онда је $(y + 1)(3y + 1) > 0$. Будући да је $5y^2 + 3 > 0$ за све $y \in Z$, то је $(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 2)^2$. Како између бројева $(2y^2 + y)^2$ и $(2y^2 + y + 2)^2$ постоји само један потпун квадрат и то је $(2y^2 + y + 1)^2$, следи да је $(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2$. Како је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 = 4y^4 + y^2 + 1 + 4y^3 + 4y^2 + 2y + 1$, то је $y^2 - 2y = 0$, тј. y узима вредности 0 или 2:

2.1) Ако је $y = 0$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2.2) Ако је $y = 2$, онда је $x^2 + x = 30$, па је $x = 5$ или $x = -6$.

Према томе сва решења дате једначине су: (0, -1); (-1, -1); (0, 0); (-1, 0); (5, 2); (-6, 2). Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

308. Доказати да не постоји двоцифрен број који је једнак збиру квадрата својих цифара.

309. Одредити два пририродна броја чији је збир једнак њиховом производу.

310. Постоје ли природни бројеви x и y чији је производ пет пута већи од њиховог збира? Колико таквих парова (x, y) има ?

311. Да ли постоје три природна броја чији је производ једнак њиховом збиру?

312. Да ли постоје природни бројеви x, y и z, такви да је њихов призвод три пута већи од њиховог збира?

313. Ако су p, q и r прости бројеви, онда једначина $p^4 + q^4 = r^4$ нема решења. Доказати.

314. Одредити цифре a, b и c и природан број n, тако да је $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$. Колико има решења?

315. Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О којим бројевимна је реч?

316. Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.

317. Постоји ли двоцифрен природан број чији је квадрат једнак кубу збира његових цифара?

318. Постоји ли троцифрен број који је једнак збиру своје цифре јединица, квадрата цифре десетица и куба цифре стотина?

319. Постоји ли троцифрен природан број који је једнак збиру четвртог степена цифре стотина, куба цифре десетица и квадрата цифре јединица?

320. Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је $y - x^3 = y^4 - 16x$.

321. Решити једначину $x^4 + 2x^3 + x^2 - 11x + 11 = y^2$, ако су x и y ненегативни цели бројеви.

322. Одредити природан број n и прост број p, тако да је збир свих делилаца броја p^4 једанак n^2.

323. Дата је једначина: $1 \cdot 1! + ... + x \cdot x! = y^4$. Колико решења у скупу природних бројева има дата једначина?

324. Одредити све парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи једнакост: $10^x + 11y = x + 2000$.

325. Нека су $x_1, x_2, ... x_{2006}$ природни бројеви који задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2006}^2 = 2040$. Одредити бројеве $x_1, x_2, ... x_{2006}$.

326. Природни бројеви a, b, c, d, e испуњавају услов: $2 \le a < b < c < d < e$. Доказати да једначина $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2} = 1$ нема решења.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

327. Доказати да једначина $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ нема решења у скупу природних бројева. (Кијевска МО – 1952.)

328. У скупу целих бројева решити једначину $\frac{xy}{y} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$. (26. ММО - 1963.)

329. Одредити све природне бројеве x чији је производ цифара (у декадном запису) једнак $x^2 - 10x - 22$. (10. ИМО – СССР 1968.)

330. Одредити све парове (x, y) целих бројева таквих да задово-љавају једнакост $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$. (ДР Немачка - 1974.)

331. Нека су a и b природни бројеви. При дељењу $a^2 + b^2$ са $a + b$ добија се количник q и остатак r. Одредити све парове (a, b) за које је $q^2 + r = 1977$. (19. ИМО - Југославија 1977.)

332. Одредити прост број p и природан број n тако да важи једнакост $(p - 1)! + 1 = p^n$. (СФРЈ – 1980.)

333. Одредити све парове (x, y) целих бројева који задовољавају једначину $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$. (Луксембург - 1980.)

334. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x^3 - y^3 = xy + 61$. (15. ССМО – 1981.)

335. Решити једначину $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ у скупу целих бројева. (Румунија - 1981.)

336. Доказати да једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1983}$ у скупу природних бројева има само коначно много решења. (Бразил 1983.)

337. Одредити све природне бројеве a, b, c, d, e такве да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1$, ако тражени бројеви испуњавају услов: $2 < a < b$ и $b < c < d < e$. (Србија 1995.)

338. Одредити све природне бројеве a, b, c такве да важи једнакост $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. (Србија 1996.)

339. Дешифровати квадрирање $(5c + 1)^2 = \overline{abcd}$ ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (Србија 1996.)

340. Одредити све природне бројеве x и y за које важи једнакост $x^3 - y^3 = xy + 25$. (Србија 2000.)

341. Нека је S(n) збир, а P(n) производ цифара природног броја n. Одредити све природне бројеве n за које је $S(n) + P(n) = n$. (Србија 2002.)

342. Студент је у току петогодишњих студија поожио 31 испит. Сваке године је дао више испита неко претходне, а на петој години је положио три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години? (Србија 2003.)

343. Одредити све парове (a, b) природних бројева, такве да је број $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ природан број. (44. ИМО – Јапан 2003.)

344. Одредити све просте бројеве p такве да је $p^2 - p + 1$ тачан куб. (22. БМО – Румунија 2005.)

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

345. Нека су $x_1, x_2, \ldots x_к$ природни бројеви такви да је $x_1 < x_2 < \ldots < x_к$ $(к \geq 2)$. Доказати да једначина $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_k^2} = 1$ нема решења.

346. Да ли постоји природан број који је једнак збиру квадрата својих цифара?

*

Приметно је да решавање Диофантових једначина није методолошки искључив посао, јер се поред основне замисли увек користи још нешто, тј. свака идеја се комбинује са неком другом, а најчешће се као помоћни инструмент користи дељивост, као основна релација теорије бројева. Проблеми који следе, експлицитно користе идеје парности (односно непарности) и дељивости као основну идеју за решавање Диофантових једначина.

4.5. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПАРНОСТИ

Коришћење парности је један од познатих и често примењиваних начина за решавање Диофантових једначина, не само зато што је разликовање парних и непарних целих бројева природно, него и зато што велики број тврђења даје алгоритам за (не)парност и зато што уочавање (не)парности најчешће елиминише читав један подскуп потенцијалних решења.

<u>ПРИМЕР 55.</u> Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 4y = 555...555$ (декадни запис броја 555...555 садржи тачно n петица).

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $n = 1$, онда је $x^2 + 4y = 5$, тј. $x = 1$, $y = 1$.

2) Ако је $n \geq 2$, онда x може бити паран или непаран број :

2.1) Ако је $x = 2к$ ($к \in N$), онда је $x^2 + 4y = 4к^2 + 4y = 4(к^2 + y) = 555...555$, па једначина нема решења.

2.2) Ако је $x = 2к + 1$ ($к \in N$), онда је $x^2 + 4y = 4к^2 + 4к + 1 + 4y = 555...555$, или $4к^2 + 4к + 4y = 4(к^2 + к + y) = 555...554$. Дакле, $2(к^2 + к + y) = 277...77$. Како је лева страна једначине паран, а десна непаран број, то једначина нема решења.

Према томе једино решење проблема је $x = y = n = 1$. Δ

<u>ПРИМЕР 56.</u> Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка је $\overline{ab} = 10a + b = (a + b)^2$. Како је $10a + b = a + b + 9a = (a + b)^2$, то је $9a = (a + b)(a + b - 1)$. Како су $(a + b)$ и $(a + b - 1)$ узастопни природни бројеви то је њихов производ паран, па је $9a$ такође паран, што значи да је и a паран број. Зато се разликују следеће могућности:

1) $\overline{ab} = 25$, што није решење, јер је $25 \neq (2 + 5)^2 = 49$;

2) $\overline{ab} = 49$, није решење јер $49 \neq (4 + 9)^2 = 169$;

3) $\overline{ab} = 64$, такође није решење, јер је $64 \neq (6 + 4)^2 = 100$;

4) $\overline{ab} = 81$, што јесте решење, јер је $81 = (8 + 1)^2 = 9^2$. Δ

<u>ПРИМЕР 57.</u> Доказати да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$ нема решења у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2, y^2, z^2 је 2007, дакле, непаран, па су или сва три броја непарна или су два парна, а трећи непаран и разликују се следећи случајеви:

1) Нека је $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ и $z = 2k + 1$ ($m, n, k \in Z$). Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2k + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007$. Следи да је $4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 4k(k + 1) = 2004$. Дељењем једнакости са 4 добија се $m(m + 1) + n(n + 1) + k(k + 1) = 501$. Како су бројеви $m(m + 1)$, $n(n + 1)$ и $k(k + 1)$ парни, то је и њихов збир паран, па једначина нема решења, јер је 501 непаран број.

2) Нека је $x = 2m$, $y = 2n$ и $z = 2k + 1$. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + (2k + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007$. Из добијене једнакости следи да је $4m^2 + 4n^2 + 4k(k + 1) = 2006$. Дељењем последње једнакости са 2 добија се да је $2m^2 + 2n^2 + 2k(k + 1) = 999$. С леве стране једнакости је паран, а са десне непаран број, па једначина ни у овом случају нема решења. ◊

<u>ПРИМЕР 58.</u> Решити једначину $x^2 + y^2 = 2^{1999}$ у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како је 2^{1999} паран број, онда су бројеви x^2 и y^2 исте парности, па постоје две могућности:

1) Бројеви x и y су непарни, тј. $x = 2m + 1$ и $y = 2n + 1$ ($m, n \in N$). Тада је $x^2 + y^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 2^{1999}$. Следи да је $4m(m + 1) + 4n(n + 1) = 2^{1999} - 2 = 2(2^{1998} - 1)$, односно $2m(m + 1) + 2n(n + 1) = 2^{1998} - 1$. Како је лева страна једнакости паран број, а десна непаран број, у овом случају једначина нема целобројних решења.

2) Бројеви x и y су парни, тј. $x = 2^m a$ и $y = 2^n b$, где су a и b непарни природни бројеви, а m и n су природни бројеви мањи од 1000. Тада је $x^2 + y^2 = (2^m a)^2 + (2^n b)^2 = 2^{2m} a^2 + 2^{2n} b^2 = 2^{1999}$, па се разликују три могућности:

2.1) Ако је $m > n \geq 1$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2n}(2^{2m - 2n}a^2 + b^2) = 2^{1999}$. Следи да је $2^{2m - 2n}a^2 + b^2 = 2^{1999 - 2n.}$ Како је $(2^{2m - 2n}a^2 + b^2)$ непаран број, а $2^{1999 - 2n}$ паран број, то једначина нема решења.

2.2) Ако је $m = n$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2n}(a^2 + b^2) = 2^{1999}$, тј. $a^2 + b^2 = 2^{1999 - 2n}$. Како је $2^{1999 - 2n}$ паран број и непаран степен броја 2, то су евидентна два случаја:

2.2.1) Ако је $n \leq 998$, онда је $2^{1999 - 2n}$ је дељиво са 4. Како су бројеви a и b непарни, то $a^2 + b^2$ при дељењу са 4 даје остатак 2, па једначина нема решења.

2.2.2) Ако је $n = 999$, онда је $a^2 + b^2 = 2^{1999 - 1998} = 2$, па је $a = b = 1$, а $x = y = 2^{999.}$

2.3) Ако је $1 \leq m < n$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2m}(a^2 + 2^{2n - 2m}b^2) = 2^{1999}$ или $a^2 + 2^{2n - 2m}b^2 = 2^{1999 - 2m.}$ Како је $(a^2 + 2^{2n-2m}b^2)$ непаран број, а $2^{1999 - 2m}$ паран број, то једначина нема решења.

Дакле, једина решења дате једначине су $x = y = 2^{999}$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

345. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = \overline{999...999}$ (број деветки је већи од 1) нема целобројних решења.

346. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је је $x^2 + 4y^2 = 1000$?

347. Доказати да једначина $x^2 - 2y^2 + 8z^3 = 3$ нема решења у скупу целих бројева.

348. Доказати да не постоје цели бројеви x и y за које је $2x^2 - 5y^2 = 7$

349. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $19x^2 + 2 = y^2$?

350. Одредити природне бројеве x и y тако да је $2^x - 1 = y^2$.

351. Постоје ли природан број к и прост број p такви да је $2^к + p = 1026$?

352. Одредити природне бројеве x и y тако да важи једнакост $x! + 2y = 123456789$.

353. Да ли за сваки природан број к већи од 1 постоје прости бројеви p и q такви да је $p + q = 3^к$.

354. Одредити све природне бројеве x и све просте бројеве p, тако да је $x! + 1 = p^2$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

355. Одредити све троцифрене природне бројеве који при дељењу са 11 дају број једнак збиру квадрата цифара полазног броја. (2. ИМО – Румунија 1960.)

356. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева. (Србија 1990.)

357. Решити једначину $x^2 + y^2 + z^2 = 1980$ у скупу целих бројева. (Србија 1980.)

358. На колико начина се 1991 може представити у облику збира неколико узастопних природних бројева. (Србија 1991.)

359. Одредити све парове (x, y) природних бројева таквих да важи једнакост $x^2 - 1992 = y^2$. (Србија 1992.)

360. Да ли постоји пет различитих природних бројева таквих да збирови формирани од по два од њих чине десет узастопних природних бројева? (Србија 1992.)

361. Постоје ли цели бројеви m и n такви да су бројеви $m^2 + n$ и $n^2 + m$ потпуни квадрати? (Србија 1999.)

ПРОБЛЕМ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

362. Одредити све природне бројеве x и y и све просте бројеве p, тако да је $x! + y! = p^2$.

363. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^4 – y = x^2 + y^2 + 54321$.

364. Нека су p, q и r прости бројеви. Решити једначину $2p + 3q = 5r$.

365. Познато је да је $2 + 2 = 2^2$, $3 + 5 = 2^3$, $3 + 13 = 2^4$, $3 + 29 = 2^5$, $3 + 61 = 2^6$, ... Да ли једначина $p + q = 2^к$, где су p и q прости, а к природан број има увек решење, тј. да ли се сваки степен броја 2 може приказати као збир два проста броја ?

*

Поред (не)парности, дакле дељивости са 2, у решавању Диофантових једначина и проблема веома је присутно коришћење дељивост и са другим бројевима, помоћу које се такође, елегантно раздвајају случајеви.

4.6. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ОСОБИНА ДЕЉИВОСТИ

Једна од основних идеја за решавање Диофантових једначина почива на једноставној чињеници да ако је A = B, онда су и својства израза A и B у погледу дељивости идентична. На пример, ако је A израз који је дељив са 3, а при дељењу са 4 даје остатак 1, онда те особине мора имати и израз B.

Идеја је да се дата једначина A = B трансформише у еквивалентну једначину $A_к = B_к$ тако да један од израза $A_к$ или $B_к$ има јасно дефинисану дељивост.

ПРИМЕР 59. *Одредити све просте бројеве p и q тако да важи једнакост $p + q = q^2 – 40$.*

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина $p + q = q^2 – 40$ трансформише, добија се да је $p + 40 = q^2 – q = q(q - 1)$. Како десна страна једначине представља производ два узастопна природна броја, то је она увек дељива са 2, па такав мора вити и број p + 40. Јасно је да то важи само за p = 2, па је $q(q – 1) = p + 40 = 2 + 40 = 42$, а q = 7.

На сличан начин се решавају ситуације и када се ради о дељивости са другим бројевима или када се из дељивости са 2 не може ништа значајно закључити.

<u>*ПРИМЕР 60.*</u> *Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре десетица и куба цифре јединица.*

РЕШЕЊЕ: Ако је тражени двоцифрени број $\overline{xy}$, онда је $10x + y = x^2 + y^3$. Еквивалентном трансформацијом се добија да је $10x - x^2 = x(10 - x) = y^3 - y = (y - 1)y(y + 1)$. Десна страна једначине представља производ три узастопна природна броја, па је увек дељива са 6, што значи да то мора бити и лева. Како су изрази x и (10 - x) исте парности x(10 - x) је дељиво са 6, ако је x = 6 или 10 - x = 6.

Ако је x = 4, онда је 24 = (y – 1)y(y + 1), па је y = 3, а тражени број $43 = 4^2 + 3^3$.

Ако је x = 6, онда је 24 = (y – 1)y(y + 1), па је y = 3, а тражени број $63 = 6^2 + 3^3$.

Веома интересантни су примери који третирају дељивост која није дата индиректно, него непосредно и директно.

<u>*ПРИМЕР 61.*</u> *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Тада је 10a + b = 9(a + b). То значи да је тражени број $\overline{ab}$ дељив са 9, па је и збир његових цифара дељив са 9. Јасно је да је тада a + b једнако 9 или 18, па је 10a + b једнако 9·9 = 81 или 9·18 = 162. Како је 162 троцифрен број, једино решење је 81 = 9 (8 + 1).

У претходним примерима коришћена је дељивост без остатка, што не мора бити увек пракса. Некада се до решења долази управо анализом остатка који приликом дељења неким бројем даје једна односно друга страна једнакости. Такав је био случај и са коришћењем последње цифре која представља остатак при дељењу са 10.

<u>*ПРИМЕР 62.*</u> *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је x! + 5y = 6666.*

РЕШЕЊЕ: Јасно је да број 6666 при дељењу са 5 даје остатак 1. Стога и број x! + 5y при дељењу са 5 мора давати остатак 1. Како је 5y увек дељиво са 5, остаје да се види када је остатак при дељењу x! са 5 једнак 1.

Зна се да је за $x \geq 5$ број $x!$ увек дељив са 5, па у обзир долазе вредности x мање од 5, дакле 1, 2, 3, 4. Како само $1! = 1$ и $3! = 6$ при дељењу са 5 дају остатак 1, то су тражена решења $5y = 6665$ или $5y = 6660$. Значи да су сва решења уређени парови: (1, 1333) ; (3, 1332). Δ

<u>ПРИМЕР 63.</u> Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О ком броју је реч? Колико има решења?

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Тада је очигледно $10x + y + 10y + x = 11(x + y) = к^2$ или $x + y = \dfrac{k^2}{11} \leq 18$. Како је $x + y$ природан број то је број $к^2$ дељив са 11 и уз то $к^2 < 198$. Значи да је $к^2 = 121$, па је $к = 11$. Тада је $x + y = 11$, па су сва решења датог проблема бројеви: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92. Δ

<u>ПРИМЕР 64.</u> Одредити све троцифрене бројеве који су 11 пута већи од збира својих цифара..

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{xyz}$. Из услова задатка следи да је $100x + 10y + z = 11\,(x + y + z)$. Како је десна страна једнакости дељива са 11, таква мора бити и лева па је тражени број дељив са 11, што значи да је $|x - y + z|$ дељиво са 11. Према томе постоје два случаја $|x - y + z| = 0$ или $|x - y + z| = 11$:

1) Ако је $|x - y + z| = 0$, онда је $y = x + z$. Ако се ова релација унесе у полазну једнакост, добија се $100x + 10x + 10z + z = 11\,(x + x + z + z)$. После дељења са 11 добије се да је $10x + z = 2x + 2z$, односно $8x = z$, па је $x = 1$, $z = 8$, $y = 9$. Тражени број је 198.

2) Ако је $|x - y + z| = 11$, онда је $x - y + z = 11$, јер је цифра $0 \leq y \leq 9$. Тада је $x + z = 11 + y$. Како је $\overline{xyz} \leq 11 \cdot (9 + 9 + 9) = 11 \cdot 27 = 297$, то је $x \leq 2$. Како је $0 \leq z \leq 9$, то је $x + z \leq 11$ и једина могућност која долази у обзир јесте $x = 2$, $z = 9$, па је $y = 0$. Међутим, број 209 који се на тај начин добије не испуњава услове, јер је $209 \neq 121 = 11 \cdot 11$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

366. У скупу целих бројева решити једначину $3x^2 + 5y^2 = 345$.

367. Да ли једначина $2^x - 1 = y^2$ има решење у скупу природних бројева?

368. Одредити све просте бројеве p и све природне бројеве x тако да важи једнакост $x! + 2 = p^2$.

369. Доказати да не постоји троцифрен природан број $\overline{abc}$ такав да је број $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ потпун квадрат.

370. Одредити природне бројеве x и y тако да важи једнакост $x! + 48y = 216$.

371. Може ли збир квадрата пет узастопних целих бројева бити потпун квадрат?

372. Да ли постоје природни бројеви x, y и к такви да важи једнакост $x^2 + y^2 = 10^к - 1$?

373. Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y такве да је $x! + y^2 = 987654$.

374. Одредити све природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.

375. Доказати да једначина $x^3 + 4 = 4y(y + 1)$ нема решења у скупу целих бројева.

376. Ако су x, y и z цели бројеви различити од нуле који су узајамно прости, одредити сва решења једначине $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m$ $(m \in Z)$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

377. Одредити све четвороцифрене бројеве који су потпуни квад-рати код којих је прва цифра једнака другој, а трећа цифра једнака четвртој. (2.ММО - 1936.)

378. Доказати да једначина $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 33$ нема целобројних решења. (9. ММО - 1946.)

379. Постоје ли цели бројеви x и y такви да се број 1977 може представити као збир њихових кубова? (Кијевска МО – 1977.)

380. Одредити троцифрен број који је квадрат природног броја a и чији је збир цифара једнак a-1. (Србија 1979.)

381. Одредити све природне бројеве n за које је број $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ прост. (Србија 1986.)

382. Дешифровати множење $a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}$ (Србија - 1991).

383. Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч? (Србија - 1994)

384. Не вршећи множење $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 = 399*6***$ у добијеном броју написати одговарајуће цифре. (Србија - 1997)

385. Одредити све парове (a, b) природних бројева, такве да је број $a^2b + a + b$ дељив са бројем $ab^2 + b + 7$. (39. ИМО – Тајван 1998.)

386. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Одредити све такве бројеве x и y. (Србија - 2001.)

387. Одредити два седмоцифрена броја таква да су њихов збир, њихова разлика и збир цифара једног од њих, факторијели неких бројева. (Србија -2001.)

388. Одредити све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$. (Србија - 2005.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

389. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $6x - y! = 10$?

390. Одредити све троцифрене бројеве који су 11 пута већи од збира квадрата својих цифара.

4.7. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОНГРУЕНЦИЈА

У неким случајевима Диофантове једначине се веома елегантно решавају коришћењем конгруенција по модулу. Идеја је слична као код дељивости јер ако је A = B, онда је и $A \equiv B \pmod{m}$, што може дати значајне резултате у анализи једнакости A = B. Примери који следе показаће да се на овај начин многе Диофантове једначине и проблеми могу решити по скраћеном поступку.

<u>ПРИМЕР 65.</u> Да ли постоје природни бројеви x, y, z и к такви да је $x^2 + y^2 + z^2 = 8к – 1$?

РЕШЕЊЕ: Квадрати природних бројева конгруентни су са 0, 1 или 4 при деље-њу са 8 (доказати). Тада је $x^2 + y^2 + z^2$ конгруентно са 0 (0+0+0), 1 (1+0+0), 2 (1+1+0),3 (1+1+1), 4 (4+0+0), 5 (4+1+0), 6 (4+1+1). Како је десна страна једначине конгруентна са 7, тј. са – 1, а лева то никада није, то дата једначина нема решења ни за једно к.

Тиме је уједно, само на други начин, решен и пример 57, јер број 2007 управо има облик 8к-1. Δ

<u>ПРИМЕР 66.</u> Одредити све ненегативне целе бројеве x и y ако је $2^x – 3^y = 7$.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $y = 0$, онда је $2^x = 8$, па је $x = 3$.

2) Ако је $y \geq 1$, онда је $2^x = 3^y + 7 \geq 10$, па је $x > 3$.

Како је $2^x = 3^y + 7$ и како је $2^x \equiv 0 \pmod 4$, то мора бити и $3^y + 7 \equiv 0 \pmod 4$, што значи да је $3^y \equiv 1 \pmod 4$, одакле је јасно да је y паран број, дакле $y = 2b$.

Слично је $3^y + 7 \equiv 1 \pmod 3$, па мора и бити и $2^x \equiv 1 \pmod 3$, што значи да је и x паран број, односно $x = 2a$.

Из једначине $2^{2a} – 3^{2b} = 7$, следи да је $(2^a + 3^b)(2^a - 3^b) = 7$. Сада је јасно да је $2^a + 3^b = 7$ и $2^a - 3^b = 1$. Решење добијеног система једначина очигледно је $2^a = 4$ и $3^b = 3$, па је $a = 2$ и $b = 1$, односно $x = 2a = 4$ и $y = 2b = 2$.

Једина решења дате једначине су, дакле (3, 0) и (4, 2). Δ

<u>ПРИМЕР 67.</u> Да ли једначина $x_1{}^4 + x_2{}^4 + ... + x_{14}{}^4 = 1599$ има решења у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Ако је x природан број онда су могући остаци при дељењу броја x са 16 из скупа {0, 1, 2,..., 15}. Тада је $x^2 \equiv к \pmod{16}$ ($к \in \{0, 1, 4, 9\}$. Из тога следи да је $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$ или $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Због тога збир $x_1{}^4 + x_2{}^4 + ... + x_{14}{}^4$ при дељењу са 16 може дати било који остатак из скупа { 0, 1, 2,..., 13, 14}, али не и број 15. Како је $1599 \equiv 15 \pmod{16}$, то дата једначина нема решења у скупу целих бројева. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

391. Доказати да једначина $\frac{m^2 + n^2}{3} = 1981$ нема решења у скупу целих бројева.

392. Доказати да једначина $x^3 + 4 = 4y(y + 1)$ нема решења у скупу целих бројева.

393. Одредити све природне бројеве чији квадрати при дељењу са 15 дају остатак: а) 7; b) 9.

394. Постоје ли цели бројеви x, y и z такви да је $x^4 + y^4 = z^4 + 3$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

395. Доказати да једначина $19x^3 - 17y^3 = 50$ нема решења у скупу целих бројева. (30. ММО 1967.)

396. Решити једначину $1! + 2! + ... + x! = y^z$, где су x, y и z цели бројеви и $z > 1$. (СФРЈ 1975.)

397. У скупу целих бројева решити једначину $19x^3 - 84y^2 = 1984$. (47. ММО 1984.)

398. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p^2 - 2q^2 = 1$. (Србија 1990.)

399. Одредити све просте бројеве p за које је $2p^4 - p^2 + 16$ потпун квадрат. (Србија 1992.)

400. Природни бројеви a и b су такви да су бројеви 15a + 16b и 16a - 15b квадрати природних бројева. Одредити најмању могућу вредност коју може да узме минимум та два квадрата. (37. ИМО – Индија 1996.)

401. Доказати да једначина $y^2 = x^5 - 4$ нема решења у скупу целих бројева. (15. БМО – Кипар 1998.)

402. Ако су x, y и z цели бројеви онда једначина $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ нема решења. Доказати. (Србија 2004.)

403. Ако су x и y природни бројеви такви да су бројеви 3x + 4y и 4x + 3y потпуни квадрати, онда су x и y дељиви са 7. Доказати. (8. ЈБМО – Србија и Црна Гора 2004.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

404. Дата је једначина $x^4 - 7y = n$ ($n \in N$ и $n \leq 100$). Да ли је више оних вредности природног броја n за који дата једначина има решење или оних за који нема решење?

405. Одредити најмање природне бројеве x и y такве да је $x^2 = 2006y + 4$.

4.8. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ДИСКРИМИНАНТЕ

Дискриминанта квадратне једначине често може помоћи да се квалитетно реши нека Диофантова једначина, чије би решавање на други начин било или немогуће или крајње нерационално. Обично се дата једначина посматра као квадратна по једној од променљивих, а онда се дискусијом дискриминанте, која, да би решења квадратне једначине била целобројна и сама мора бити цео број, разликују могући случајеви.

<u>*ПРИМЕР 68.*</u> *Одредити све целе бројеве x и y такве да је $2x^2 + 5x + y^2 = 19$.*

РЕШЕЊЕ: Дата једначина се посматра као квадратна једначина по x, тј. као $2x^2 + 5x + (y^2 - 19) = 0$. Решавањем дате једначине по x добија се $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 8(y^2 - 19)}}{4}$. Очигледно је да x може (али не мора) бити целобројно само ако је дискриманта ове квадратне једначине потпун квадрат. Другим речима, мора бити $25 - 8(y^2 - 19) = к^2$, где је к неки цео број, који такође треба одредити.

Дакле, $25 - 8y^2 + 152 = к^2$, па је $к^2 + 8y^2 = 177$. Како је $8y^2 \leq 177$, то је $y^2 \leq 4$, па је $|y| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Број к је цео број ако је $|y| = 1$ или $|y| = 4$. Тада је $|к| = 13$ или $|к| = 7$. Тако се сада сасвим лако добијају сва решења дате једначине: (2, 1) или (-3, 4), при чему су решења (1/2, 4) и (-9/2, 1) одбачена, јер нису целобројна. Δ

<u>*ПРИМЕР 69.*</u> *Једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $y = 0$, онда је $x = 0$.

2) Ако је $y = -1$, онда је $x = 1$.

3) Ако је $y = 1$, онда је $x = -1$.

4) Ако $y \notin \{-1, 0, 1\}$, онда је $(1 - y^2)x^2 + xy + y^2 = 0$. Потребан услов да добијена квадратна једначина има целобројно решење је да је њена дискриминанта потпун квадрат. Значи да $y^2 - 4(1 - y^2)y^2 = y^2 - 4y^2 + 4y^4 = 4y^4 - 3y^2 = y^2(4y^2 - 3)$ мора бити потпун квадрат, тј. или је $y = 0$ или је $4y^2 - 3 = к^2$. Следи да је $4y^2 - к^2 = 3$, па је $(2y + к)(2y - к) = 3$. Решавањем одговарајућих система једначина добијају се да је $y = 1$ или $y = -1$. Како $y \notin \{-1, 0, 1\}$, то у овом скупу једначина нема решења.

Дакле, једина решења једначине су: (0, 0); (1, -1); (-1, 1). Δ

<u>ПРИМЕР 70.</u> Колико решења у скупу целих бројева има једначина $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$? [10]

РЕШЕЊЕ: Факторизација се може извести на више начина. Једна могућност је да се на једној страни једнакости факторизује полином по y, а на другој полином по x. Конкретно, $y^4 - 1 = (y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. С обзиром да није лако наслутити природу чинилаца ни једног ни другог полинома, тешко да се може направити нека рационална дискусија. Зато ваља покушати и на други начин.

Из $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$, следи $y^4 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1 + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$. Дакле, $y^4 - (x^2 + 3x + 1)^2 = 0$, односно $(y^2 - (x^2 + 3x + 1))(y^2 + (x^2 + 3x + 1)) = 0$. Према томе разликују се два случаја: $x^2 + 3x + 1 - y^2 = 0$ или $x^2 + 3x + 1 + y^2 = 0$.

Коришћењем дискриминанти добија се:

1) $к^2 = 9 - 4(1 - y^2) = к^2$ или $к^2 - 4y^2 = 5$. Следи да је $к^2 = 9$, а $y^2 = 1$.

2) $к^2 = 9 - 4(1 + y^2) = к^2$ или $к^2 + 4y^2 = 5$. Следи да је $к^2 = 1$, а $y^2 = 1$.

Решавањем конкретних квадратних једначина добија се да једначина има 8 решења: (0, 1); (0, -1); (-1, 1); (-1, -1); (-2, 1); (-2, -1); (-3, 1); (-3, -1). Δ

---

[10] Задатак је био на Савезном такмичењу младих математичара Југославије 1981. године у 2. разреду.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

406. Решити једначину $x^2 + xy + y^2 = 1$ у скупу целих бројева.

407. Одредити све целе бројеве x, y и z такве да је $xy + z^2 + 1 = 0$ и $x - y = 3$.

408. У скупу целих бројева решити једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

409. Одредити све парове (x, y) целих бројева за које је $x^4 + x^2 + 2 = y^2$.

410. Решити једначину $x^8 + x^4 + 1 = y^2 + 2y$, ако су x и y цели бројеви.

411. У скупу целих бројева решити једначину $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

412. За које вредности целобројног параметра a једначина $x^2 + y^2 = axy$ има решења у скупу целих бројева? (27. ММО - 1964.)

413. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $x^2 - xy + y^2 = x + y$. (7. ММО 1941. и Кијевска МО 1947.)

414. Одредити све целе бројеве x тако да је $x^2 + 3x + 24$ потпун квадрат. (СФРЈ 1980.)

4.9. МЕТОД САМОГЕНЕРИСАЊА

Једну класу проблема везаних за Диофантове једначине представљају они задаци у којима се тражи доказ да дата једначина има бесконачно много решења. Такве проблеме најлакше је решити ако је могуће одредити опште решење једначине. Међутим, понекад је поблеми долажења до општег решења веома компликован и зато се обично тражи бар једна формула која генерише бесконачно много решења. Најчешћи поступци за то су следећи:

Одреди се једно решење $(x_o, y_o, z_o, ...)$ једначине $F(x, y, z, ...) = 0$, а потом се погодном трансформацијама добијено решење мултипликује у неку од општијих форми. При том, још једном напомињемо да добијено решење најчешће није и опте решење, али јесте решење које доказује бесконачност броја решења.

<u>ПРИМЕР 71.</u> *Доказати да једначина $x^2 + y^2 = z^3$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Једно од могућих решења дате једначине је x = 5, y = 10 и z = 5, јер је $5^2 + 10^2 = 125 = 5^3$. Тада је $5^2к^6 + 10^2к^6 = 5^3к^6$ (к је цео број), па је $(5к^3)^2 + (10к^3)^2 = (5к^2)^3$. Формуле $x = 5к^3$, $y = 10к^3$ и $z = 5к^2$ генеришу бесконачно много решења дате једначине.

<u>ПРИМЕР 72.</u> *Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^2 + y^3 = z^4 + t^5$?*

РЕШЕЊЕ: Поред тривијалних решења x = y = z = t = 0 и x = y = z = t = 1, једно од могућих решења дате једначине је $x = 2^{30}$, $y = 2^{20}$ $z = 2^{15}$ и $t = 2^{12}$. Међутим, решења су и $x = 2^{30к}$, $y = 2^{20к}$, $z = 2^{15к}$ и $t = 2^{12к}$. Наравно могуће је и општије решење: $x = a^{30к}$, $y = a^{20к}$, $z = a^{15к}$ и $t = 2^{12к}$ ($a \in N$), али и још општије: $x = a^5$, $y = b^4$, $z = b^3$ и $t = a^2$ ... Према томе једначина има бесконачно много решења.

Некад је при решавању једначине F(x, y, z, ...) = 0 могуће погодним алгебарским трансформацијама добити полиноме P(m, n), Q(m, n), R(m, n)... (m, n су целобројни параметри) такве да је F(P(m,n), Q(m,n), R(m,n), ...) = 0. На тај начин се добија једнакост која за разне вредности m и n генерише бесконачно много решења дате једначине.

<u>ПРИМЕР 73.</u> *Доказати да једначина $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Из једнакости $4n^4 + 4n^2 + 1 = (2n^2)^2 + (2n)^2 + 1 = (2n^2 + 1)^2$, очигледно је да је $x = 2n^2$, $y = 2n$ и $z = 2n^2 + 1$ једно од могућих решења дате једначине.

Овај метод решавања Диофантових једначина почива и на чињеници да се често дата једначина може трансформисати у еквивалентну тако да проналажење једног решења једначине индукује следеће решење и настављањем тог процеса добија се бесконачно много решења дате једначине. Конкретно идеја је да се дата једначина F(x, y) = 0 трансформише у еквивалентну једначину F(P(x, y), Q(x, y)) = 0, где су P(x, y) и Q(x, y) неки полиноми по x и y. Ако је (x_o, y_o) једно решење дате једначине, онда се рекурентним формулама $x_{к+1} = P(x_к, y_к)$ и $y_к = Q(x_к, y_к))$ добија бесконачно много решења дате једначине. Слична идеја је присутна и код решавања Пелове једначине.

<u>ПРИМЕР 74.</u> Доказати да једначина $2x^2 - 3y^2 = 5$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Предпоставимо да је постоје цели бројеви a, b, c и d такви да је $2(ax + by)^2 - 3(cx + dy)^2 = 2x^2 - 3y^2 = 5$. Даљом трансформацијом се добија $2a^2x^2 + 4abxy + 2b^2y^2 - 3c^2x^2 - 6cdxy - 3d^2y^2 = 2x^2 - 3y^2$ или $(2a^2 - 3c^2)x^2 + 2(2ab - 3cd)xy + (2b^2 - 3d^2)y^2 = 2x^2 - 3y^2$. Сада је очигледно $2a^2 - 3c^2 = 2$, $2ab - 3cd = 0$ и $2b^2 - 3d^2 = -3$. Једно од решења прве једначине је $a = 5$, $c = 4$, па је $10b - 12d = 0$ и $2b^2 - 3d^2 = -3$. Решавањем система добија се $b = 6$, $d = 5$.

Дакле, $2(5x + 6y)^2 - 3(4x + 5y)^2 - 2x^2 - 3y^2 = 5$. Како је $x_o = 2$, $y_o = 1$ једно решење дате једначине, очигледно је да формуле $x_{к+1} = 5x_к + 6y_к$ и $y_{к+1} = 4x_к + 5y_к$ генеришу бесконачно много целобројних решења дате једначине.

Напоменимо и да решења добијена датим рекурентним формулама нису и једина решења дате једначина, јер систем једначина $2a^2 - 3c^2 = 2$, $2ab - 3cd = 0$ и $2b^2 - 3d^2 = -3$ има и других решења (на пример $a = 5$, $b = - 6$, $c = 4$, $d = -5$), а и почетна решења x_o и y_o могу бити други бројеви (на пример 2 и –1), па ће се добити и друге рекурентне формуле које такође генеришу бесконачно много решења дате једначине.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

415. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева x и y таквих да је $x^2 = 7y + 2$.

416. Доказати да сваки природан број к, једначина $x^2 + y^2 + к = z^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

417. Доказати да једначина $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = y^2 + 1$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

418. Доказати да за сваки природан број m постоји бесконачно много парова (x,y) целих бројева таквих да је $x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1$.

419. Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + (x+y)^2$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

420. Нека су m и n природни бројеви ($1 \leq m \leq 1981$, $1 \leq n \leq 1981$) који задовољавају једначину $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$. Одредити максималну могућу вредност за $m^2 + n^2$. (22. ИМО – САД 1981.)

421. Дата је једначина $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$. Ако је n такав природан број да дата једначина има целобројно решење (x, y), доказати да онда дата једначина има бар три целобројна решења. Доказати да за $n = 2891$ дата једначина нема ниједно целобројно решење. (23. ИМО – Мађарска 1982.)

422. Ако су x, y и z цели бројеви онда једначина $xy + yz + zx = 1$ има бесконачно много решења. Доказати. (БИХ – 1990.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

423. Доказати да постоји бесконачно много тројки (x, y, z) целих бројева таквих да је $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + z^2$.

4.10. МЕТОД "НАЈМАЊЕГ" РЕШЕЊА

Метод минималног решења[11] се често користи приликом налажења свих решења неких Диофантових једначина, односно доказивања да решења не постоје. Принцип је следећи:[12] " Претпоставимо да дата једначина има целобројна решења и да постоји алгоритам којим се из једног целобројног решења једначине добије друго целобројно решење. Ако једначина има целобројно решење, онда постоји решење које је минимално у неком смислу (нпр. минималан је збир $|x|+|y|$). Решење које се добија из тог решења није мање, па се тако добијају одређене особине тог минималног решења – оне су понекад довољне да закључимо да такво решење (и, дакле, ниједно друго) не постоји.

[11] Неки ову методу зову и (Фермаов) метод бесконачног умањивања

[12] Видети Владимир Мићић, Зоран Каделбург: Увод у теорију бројева - Друштво математичара Србије, Београд 2004, стр. 53 – 54.

Друга формулација овог метода је следећа. Претпоставимо да постоји решење једначине у скупу природних бројева и да се може наћи алгоритам којим се из једног решења у скупу природних бројева добија друго решење у скупу природних бројева, али које је *строго* мање (у одређеном смислу) од полазног. То значи да постоји бесконачно много природних бројева мањих од датог природног броја, што је, наравно, немогуће. Дакле, дата једначина нема природних решења."

<u>*ПРИМЕР 75.*</u> *Одредити сва целобројна решења једначине* $x^2+y^2=3z^2$.

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $x = y = z = 0$.

Претпоставимо да има и других решења. Нека је (x_o, y_o, z_o) оно решење дате једначине у скупу природних бројева за које променљива $\alpha_o = |x_o|+|y_o|+|z_o|$ има најмању могућу вредност. Из релације $x_o^2 + y_o^2 = 3z_o^2$ следи да су бројеви x_o и y_o дељиви са 3 (уколико би x_o или y_o били облика $3к + 1$, или $3к - 1$, онда би x_o^2 или y_o^2 при дељењу са 3 имали остатак 1, што значи да би збир $x_o^2 + y_o^2$ при дељењу са 3 имо остатак 1, или 2). Дакле $x_o = 3x_1$ и $y_o = 3y_1$. Тада је $x_o^2 + y_o^2 = 9(x_1^2 + y_1^2) = 3z_o^2$. Следи да је $3(x_1^2 + y_1^2) = z_o^2$, па је и z_o дељиво са 3, тј $z_o = 3z_1$. Сада је $3(x_1^2 + y_1^2) = 9z_1^2$, па је $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. То значи да је уређена тројка (x_1, y_1, z_1) такође решење дате једначине.

Како је $\alpha_o = |x_o|+|y_o|+|z_o| = |3x_1|+|3y_1|+|3z_1| = 3\,(|x_1|+|y_1|+|z_1|) = 3\alpha_1$, то следује да је $0 < \alpha_1 = \dfrac{\alpha_o}{3} < \alpha_o$. Противуречност која доказује да сем тривијалног решења, једначина нема других решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 76.*</u> *Одредити сва целобројна решења једначине* $x^3+2y^3=4z^3$

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $x = y = z = 0$. Докажимо да других решења нема. [13]

Нека је (x_o, y_o, z_o) једно решење дате једначине у скупу природних бројева, тј. нека је $x_o^3 + 2y_o^3 = 4z_o^3$. Следи да је $x_o^3 = 4z_o^3 - 2y_o^3 = 2(2z_o^3 - y_o^3)$. То значи да x_o мора бити паран број, тј. $x_o = 2x_1$. Сада је очигледно $8x_1^3 = 4z_o^3 - 2y_o^3$. Дељењем са 2 добија се једначина $4x_1^3 = 2z_o^3 - y_o^3$ из које следи да је y_o такође паран број, тј $y_o = 2y_1$. Заменом $y_o = 2y_1$ следи да је $4x_1^3 = 2z_o^3 - 8y_1^3$.

---

[13] Проблем је задат на 18. ММО - 1955. године

Ако се добијена једначина подели са 2 добије се $2x_1^3 = z_o^3 - 4y_1^3$. Из ове једначине следи да је z_o паран број, тј. $z_o = 2z_1$. Заменом у претходној једначини следи да је $2x_1^3 = 8z_1^3 - 4y_1^3$, а дељењем са 2 једначина постаје $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$. Из последње једначине је очигледно да је $x_1 = \frac{x_o}{2}$, $y_1 = \frac{y_o}{2}$, $z_1 = \frac{z_o}{2}$ једно решење дате једначине. Ако се овај поступак настави добиће се да су решења дате једначине све тројке $\frac{x_o}{2^к}, \frac{y_o}{2^к}, \frac{z_o}{2^к}$, јер је очигледно $\left(\frac{x_o}{2^к}\right)^2 + 2\left(\frac{y_o}{2^к}\right)^2 = \frac{1}{2^{2к}}(x_o^2 + 2y_o^2) = = \frac{1}{2^{2к}}4z_o^2 = 4\left(\frac{z_o}{2^к}\right)^2$
Како таквих к има бесконачно много, а бројева који су мањи од x_o, y_o, z_o и дељиви са $2^к$, само коначно много, то је очигледно да је тривијално решење једино решење дате једначине. Δ

<u>*ПРИМЕР 77.*</u> *Одредити сва парове природних бројева x и y таквих да је $x \mid (y^2 + 1)$ и $y \mid (x^2 + 1)$.*

РЕШЕЊЕ: Из $x \mid (y^2 + 1)$ следи $px = y^2 + 1$ и из $y \mid (x^2 + 1)$ следи $qy = x^2 + 1$. Ако је $D(x, y) = d$, тада је $x = \alpha d$ и $y = \beta d$. Следи да је $p\alpha d = \beta^2 d^2 + 1$ и $q\beta d = \alpha^2 d^2 + 1$. Из добијених једнакости је $d\,(p\alpha - \beta^2 d) = 1$ и $d\,(q\beta - \alpha^2 d) = 1$, па је јасно да је $d = 1$, односно бројеви x и y су узајамно прости.

Како је $px \cdot qy = (y^2 + 1)(x^2 + 1) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$, то је очигледно да је услов задатка еквивалентан са $xy \mid x^2 + y^2 + 1$. Ако је $n = \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} > 2$, онда је $nxy = x^2 + y^2 + 1$, односно $x^2 - nyx + y^2 + 1 = 0$ (*). Нека је (x, y) једно решење једначине (*) у скупу природних бројева у коме је $x \geq y$ и x најмање могуће.

Ако се једначина (*) напише као квадратна једначина по x, онда се добија да је $f(x) = x^2 - nyx + y^2 + 1 = 0$. Како је $f(ny - x) = (ny - x)^2 - ny(ny - x) + y^2 + 1 = n^2y^2 - 2nyx + x^2 - n^2y^2 + nyx + y^2 + 1 = x^2 - nyx + y^2 + 1 = 0$. Дакле, ако је (x, y) решење дате једначине (*), онда је и (ny – x, y) решење једначине (*).

Како је $ny - x > 0$ и како је x најмање могуће решење, то је $ny - x \geq x \geq y$. Квадратна функција $f(x)$ је негативна у интервалу $(x, ny - x)$, а ненегативна изван тог интервала. Према томе је $f(y) = y^2 - ny \cdot y + y^2 + 1 = (2 - n)y^2 + 1 \geq 0$. Ако је $x = y = 1$ најмање решење, онда је $3 - n \geq 0$, па је $n = 3$.

Како решење (x, y) генерише решење $(ny - x, y)$, значи да решење (x, y) генерише решење $(3y - x, y)$, па се од решења $(1, 1)$ добија решење $(2, 1)$, а од овога ново решење $(5, 2)$, па затим $(13, 5)$,... Дакле сва решења проблема су уређене двојке (F_{2n-1}, F_{2n+1}), где су $F_к$ чланови Фибоначијевог низа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...($F_1 = F_2 = 1$, $F_{к+2} = F_к + F_{к+1}$). Δ[14]

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

424. За које вредности природног броја к једначина $x^2 + y^2 + z^2 = кxyz$ има решење.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

425. Доказати да једначина $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$ нема решења у скупу природних бројева (Кијевска МО 1948.)

426. Доказати да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ сем тривијалног решења $x = y = z = 0$ нема других целобројних решења. (12. ММО 1949.)

427. Одредити све целе бројеве x, y, z и u тако да важи једнакост $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot u$. (12. ММО 1949.)

428. Одредити све целе бројеве x, y и z тако да је $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$. (САД 1976.)

429. Доказати да једначина $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$ у скупу рационалних бројева има јединствено решење $x = y = z = 0$. (Мађарска 1983.)

430. У скупу целих бројева решити једначину $x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2)$. (Србија 2003.)

431. Одредити сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = 2004xyz$, ако су x, y и z цели бројеви. (Србија 2004).

---

[14] Дати пример и још неке примере могу се видети у књизи Мићић Владимир, Каделбург Зоран, Ђукић Душан: Увод у теорију бројева, ДМС, Београд 2004.

4.11. ДИОФАНТОВ МЕТОД

У другој књизи "Аритметике" Диофант Александријски даје општи метод за одређивање рационалних решења квадратне алгебарске једначине са две променљиве. Преведено на језик данашње математичке науке Диофантов метод се састоји у следећем:

Посматра се једначина $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (A, B, C, D, E, F су цели бројеви) која у xOy равни представља неку криву другог реда (или једну, односно две праве). Ако је (x_o, y_o) једно целобројно решење дате једначине, онда се кроз тачку (x_o, y_o) поставља прамен правих $y - y_o = к(x - x_o)$ (к је било који рационалан број различит од 0). За разне вредности рационалног параметра к, добија се бесконачно много тачака пресека правих и криве. Те тачке су рационалне.[15]

Конкретну примену Диофантовог метода илуструју следећи примери:

<u>*ПРИМЕР 78.*</u> *Решити једначину* $3x^2 - y^2 = 26$ *у скупу рационалних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Диофант је једначину праве користио у параметарском облику: $x = xo + t$; $y = yo + кt$. Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (3, 1)$, то је $x = 3 + t$; $y = 1 + кt$. Заменом у једначину добија се $3(3 + t)^2 - (1 + кt)^2 = 26$, а после трансформације $t\,(\,t\,(3 - к^2) + 18 - 2к) = 0$.

Решења добијене једначине су $t = 0$ или $t = \dfrac{18 - 2к}{к^2 - 3}$. Ако је $t = 0$ добија се почетно решење, а ако је $t = \dfrac{18 - 2к}{к^2 - 3}$, онда је $x = \dfrac{3к^2 - 2к + 9}{к^2 - 3}$ и $y = \dfrac{18к - к^2 - 3}{к^2 - 3}$.

За к = 1, добија се целобројно решење (-5, -7), а за к = 2 решење је (17, 29).

[15] Видети одговарајуће разматрање у књизи Диофант Александријски: Аритметика – Наука, Москва, 1974.

Ако се к напише као количник два цела броја, односно $к = \frac{m}{n}$ добија се двопараметарско решење: $x = \frac{3m^2 - 2mn + 9n^2}{m^2 - 3n^2}$ и $y = \frac{18mn - m^2 - 3n^2}{m^2 - 3n^2}$. Δ

<u>ПРИМЕР 79.</u> Решити једначину $x^2 - 2y^2 + 3xy + 4x - 5y + 3 = 0$ у скупу рационалних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (1, 0)$, то је $x = 1 + t$; $y = кt$. Заменом у једначину добија се $(1 + t)^2 - 2(кt)^2 + 3(1 + t)\,кt - 4(1 + t) + + 5кt + 3 = 0$. После трансформације се добија да је $t\,(\,t\,(1 - 2к^2 + 3к) + 8к - 2) = 0$. Решења добијене једначине су $t = 0$ или $t = \frac{8к - 2}{2к^2 - 3к - 1}$. Тада су решења дате једначине $x = \frac{2к^2 + 5к - 3}{2к^2 - 3к - 1}$ и $y = \frac{8к^2 - 2к}{2к^2 - 3к - 1}$. Δ

Диофантовим методом се могу решити и сложеније једначине. На пример неке квадратне једначине са три променљиве. [16]

<u>ПРИМЕР 80.</u> Решити једначину $19a^2 + 5b^2 = c^2$ у скупу рационалних бројева.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $c = 0$, онда једначина има тривијално решење $a = b = c = 0$.

2) Ако је $c \neq 0$, онда се може увести смена $x = \frac{a}{c}$ и $y = \frac{b}{c}$ којом се једначина трансформише у једначину $19x^2 + 5y^2 = 1$. Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$ то сменом $x = \frac{1}{8} + t$ и $y = \frac{3}{8} + кt$ и елиминацијама које следе, добија $t = \frac{-(15к + 19)}{4(5к^2 + 19)}$.

[16] Шире теоријске основе и још неке примере видети у књизи: Диофант Александријски: Аритметика – Наука, Москва, 1974, стр. 50-51.

Ако се добијена вредност уврсти у трансформационе формуле добија се $x = \dfrac{5к^2 - 30к - 19}{8(5к^2 + 19)}$ и $y = \dfrac{-15к^2 - 38к + 57}{8(5к^2 + 19)}$.

Враћањем на почетну једначину добију се решења $a = \alpha(5к^2 - 30к - 19)$; $b = \alpha(-15к^2 - 38к + 57)$ $c = 8\alpha(5к^2 + 19)$, где је α фактор пропорционалности. Ове формуле за целобројно к генеришу целобројна решења дате једначине. Ако се к замени рационалним бројем $к = \dfrac{m}{n}$ добијају се двопараметарска решења дате једначине: $a = \alpha\dfrac{5m^2 - 30mn - 19n^2}{n^2}$; $b = \alpha\dfrac{-15m^2 - 38mn + 57n^2}{n^2}$ и $c = 8\alpha\dfrac{5m^2 + 19n^2}{n^2}$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

432. Одредити сва рационална решења једначине $x^2 + 2y^2 = 3z^2$, где су x, y и z природни бројеви.

433. Опиши целобројна решења следећих Диофантових једначина: $x^2 - 15y^2 = z^2$; $x^2 - yz = z^2$; $x^2 + 3y^2 = 5z^2$.

5. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Једначина која садржи само једну променљиву за коју се поставља услов да је целобројна је Диофантова једначина једне променљиве.

<u>*ПРИМЕР 81.*</u> *Одредити све целе бројеве x за које је* $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 14 = 0$.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је x = 0, онда једначина нема решења, јер је $14 \neq 0$.

2) Ако је $x \neq 0$, онда дељењем са x дата једначина се трансформише у следећу: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + \frac{14}{x} = 0$. Како је x цео број и како је десна страна једнакости цео број, то мора бити и лева, а то значи да израз $\frac{14}{x}$ мора бити цео број. Дакле број x мора припадати скупу целобројних делилаца броја 14, па је $x \in \{ -14, -7, -2, -1, 1, 2. 7, 14\}$. Провером се добија да је једино x = 2 задовољава дату једначину. Δ

Проблем се може коришћењем идентичне идеје уопштити на било коју Диофантову једначину једне променљиве која је дата у облику полинома.[17]

<u>*ТЕОРЕМА 1.*</u> *Ако је* x_o *целобројна нула полинома* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$ *са целобројним коефицијентима* ($a_n \neq 0$)*, онда је* x_o *један од целобројних делилаца броја* a_o.

ДОКАЗ: Ако је x_o нула полинома $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$ и ако је x_o цео број, онда је $P(x_o) = a_n x_o^n + \ldots + a_1 x_o + a_o = 0$.

Ако је $a_o = 0$, онда је $P(x_o) = x_o(a_n x_o^{n-1} + \ldots + a_2 x_o + a_1)$, па је једна нула полинома $x_o = 0$.

Ако је $a_o \neq 0$, онда је и $x_o \neq 0$, па је једначина $P(x_o) = a_n x_o^n + \ldots + a_1 x_o + a_o = 0$ еквивалентна са $a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 + \frac{a_o}{x} = 0$. Како је десна страна једначине цео број и како су сви сдабирци на левој страни целобројни, то мора бити и $\frac{a_o}{x}$. Дакле x је један од целобројних делилаца броја a_o.

[17] Viet (1540-1603) је у својим радовима доказао опшу теорему и објаснио алгоритам за одређивање рационалних нула полинома с целобројним коефицијентима. Видети: Војислав Андрић: Рационалне нуле полинома – МФЛ, број , стр. 113-116, Загреб 1985.

<u>*ПРИМЕР 82.*</u> *Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени цео број к. Тада је $к^3 + (к + 1)^3 + (к + 2)^3 = (к + 3)^3$. Сређивањем добијене једначине добија се $к^3 – 6к - 9 = 0$.[18]

Трансформацијом израза $к^3 – 6к – 9 = к^3 – 27 – 6к + 18 = (к – 3)(к^2 + 3к + 9) – 6(к – 3) = (к – 3)(к^2 + 3к + 3)$, добија се као једино решење број к = 3, јер једначина $к^2 + 3к + 3$ нема целобројних решења. Према томе тражена релација је $3^3+4^3+5^3 = 6^3$.Δ[19]

<u>*ПРИМЕР 83.*</u> *Може ли збир кубова првих n узастопних природних бројева бити a) 1 234 567; b) 29 506 624?*

РЕШЕЊЕ: a) Познато је да је је $1^3 + 2^3 + (n - 1)^3 + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Дакле, збир кубова првих n узастопних бројева је потпун квадрат. Како број 1 234 567 није потпун квадрат, јер се ниједан квадрат не завршава цифром 7, одговор је негативан.

b) Ако је $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ = 29 506 624, онда је $\dfrac{n(n+1)}{2}$ = 5432. Тада је производ n(n + 1) = 10 864, а то није могуће, јер се производ два узастопна цела броја завршава цифрама 0, 2 или 6 и никада не завршава цифром 4. Δ

<u>*ПРИМЕР 84.*</u> *Одредити све просте бројеве p ако је $p^2 + 2^p = 177$.*

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да су функције $y = p^2$ и $y = 2^p$ растуће, па је и цео израз $p^2 + 2^p$ растући. Како је p непаран број и $2^p < 177 < 256 = 2^8$, то је p < 8. Дакле, p је 3, 5 или 7. Провером се лако добија да је p = 7, јер је $2^p + p^2 = 49 + 128 = 177$. Δ

<u>*ПРИМЕР 85.*</u> *Збир квадрата првих n природних бројева је 4900. Колико је бројева сабрано?*

РЕШЕЊЕ: Како је $1^2 + 2^2 + (n - 1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ = 4900, то је производ $n(n+1)(2n+1) = 6 \cdot 4900 = 6 \cdot 100 \cdot 49 = 6 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 49 = 24 \cdot 25 \cdot 49$. Очигледно је n = 24. Δ

---

18 И ова једначина се може решити коришћењем теореме о рационалним нулама полинома.

19 Видети пример 7. у претходном поглављу.

Занимљиво је да је збир квадрата првих 24 природна броја потпун квадрат броја 70.. Поставља се питање да ли таквих случајева има и касније у низу природних бројева, тј. постоји ли још неки природан број n такав да је $1^2 + 2^2 + ... + (n - 1)^2 + n^2 = к^2$?[20]

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

434. Разлика збира кубова првих n парних бројева и збира кубова првих n непарних бројева је 2240. Одредити n.

435. Одредити цео број x, тако да је $3^x + 5^x = 152$.

436. Постоји ли пет узастопних целих бројева таквих да је збир кубова прва четири броја једнак кубу петог броја?

437. Одредити три узастопна цела броја са особином да када се четвртом степену првог броја дода други број, онда се добије куб трећег броја.

438. Одредити све целе бројеве x, тако да важи једнакост $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 + (x + 4)^3 = (x + 10)^3$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

439. Доказати да куб највећег од три узастопна цела броја не може бити једнак суми кубова преостала два броја. (Мађарска 1909.)

440. У скупу природних бројева решити једначину $x^{5-x} = (6 – x)^{1-x}$. (СФРЈ 1980.)

441. Нека су p и q непарни цели бројеви. Одредити сва целобројна решења једначине $x^{2000} + px^{1999} + q = 0$. (Србија 2000.)

442. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења. (Србија 2004.)

443. Одредити све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 – px^3 + q = 0$ има целобројна решења. (Србија 2004.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

444. Постоје ли природни бројеви n и к такви да је збир квадрата првих n природних бројева потпун квадрат: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = к^2$? Да ли таквих бројева има коначно или бесконачно много?

---

[20] О овом проблему ће бити још речи у поглављу о Пеловој једначини.

6. ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА ax + by = c

Ако су a, b и c цели бројеви и $ab \neq 0$, онда се линеарна једначина $ax + by = c$, при чему су x и y цели бројеви, назива линеарна Диофантова једначина.

Очигледно је да се свака линеарна једначина са две промењиве и целобројним коефицијентима може свести на једначину облика $ax + by = c$.

Већ је речено је да су основна питања везана за сваку Диофантову једначину:

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења;
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговоре на ова питања, када је реч о линеарној Диофантовој једначини са две промењиве, дају следећи примери и теореме, при чему ће нека питања и проблеми бити третирани на више начина, као на пример, сам алгоритам за решавање линеарне Диофантове једначине.

6.1. ДА ЛИ ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА УВЕК ИМА РЕШЕЊЕ?

<u>ПРИМЕР 86.</u> *Имају ли једначине $x + y = 2006$ и $2x + 10y = 2005$ решења у скупу целих бројева?*

РЕШЕЊЕ: Прва једначина очигледно има бесконачно много решења, јер је уређени пар $(x_0, 2006 - x_0)$, где је x_0 било који цео број, опште целобројно решење дате једначине.

Друга једначина нема решења јер је за ма који пар целих бројева (x, y) на десној страна једначине непаран број, а на левој паран број.

Прецизан алгоритам за одређивање да ли једначина $ax + by = c$ има или нема решења је директна последица следеће теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Потребан и довољан услов да линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има решење је да је број c дељив са NZD (a, b).*

ДОКАЗ: Нека је NZD (a,b) = d ($d \neq 1$).

Ако је (x_0, y_0) једно целобројно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$. Тада постоје узајамно прости цели бројеви k и l такви да је $a = kd$ и $b = ld$. Значи да је $kdx_0 + ldy_0 = c$, тј. $d(kx_0 + ly_0) = c$. Лева страна једнакости је дељива са d, па мора бити и десна, тј. $d \mid c$.

Обрнуто, нека је $d \mid c$. Тада постоји цео број m такав да је $c = md$. Како се број d може представити као хомогена линеарна функција од a и b[21], то је $d = \alpha a + \beta b$ ($\alpha \in Z$, $\beta \in Z$). Тада је $c = md = m(\alpha a + \beta b) = a(m\alpha) + b(m\beta)$, па је $x = m\alpha$, $y = m\beta$, једно решење дате једначине. ◊

Наведимо, без доказа, и две непосредне последице доказане теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има увек решење ако је NZD (a, b) = 1, тј. уколико су a и b узајамно прости цели бројеви.*

ТЕОРЕМА 4. *Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) нема решења ако се NZD (a, b) не садржи у c.*

ПРИМЕР 87. *Доказати да једначина $2x + 5y = 111$ има бесконачно много целобројних решења, а једначина $3x + 6y = 1000$ нема целобројних решења.*

РЕШЕЊЕ: Како су 2 и 5 узајамно прости прва једначина на основу теореме 2. увек има решења. Друга једначина се дељењем са 3 може трансформисати у облик $x + 2y = \frac{1000}{3}$ из кога је очигледно да нема целобројних решења. Δ

[21] Та чињеница је позната у теорији бројева. Видети: Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева – Друштво математичара Србије, Београд, 2004. – стр. 44.

Јасно је да ако једначини $ax + by = c$, има решења, тј. уколико је NZD $(a, b) = d$ $(d \neq 1)$ делилац броја c, тада постоје цели бројеви k, l и m, такви да је $a = kd$, $b = ld$ и $c = md$. Једначина тада постаје $kdx + ldy = md$ или $кx + ly = m$. При том су k и l узајамно прости. Зато у суштини једначину $ax + by = c$ треба и посматрати или трансформисати до облика у коме су a и b узајамно прости, јер се из тако трансформисане једначине одмах види егзистенција решења.

*

Како је проблем егзистенице решења једначине $ax + by = c$ претходним разматрањима разрешен, следи покушај да се пронађе и алгоритам за решавање свих линеарних Диофантових једначина.

6.2. ОЈЛЕРОВ МЕТОД РЕШАВАЊА ЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

<u>ПРИМЕР 88.</u> Одредити сва решења једначине $3x + 7y = 89$, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 3 и 7 узајамно прости бројеви то једначина увек има решење.

Решавањем једначине по x и трансформацијом њене десне стране у количник, добија се $x = \dfrac{89 - 7y}{3} = 29 - 2y - \dfrac{y-2}{3}$, па је x цео број само ако је број y - 2 дељиво са 3, тј. ако је $y - 2 = 3к$, где је к неки цео број. Тада је $y = 3к + 2$, а $x = 25 - 7к$. Добијено решење је опште решење дате једначине и показује да дата једначина има бесконачно много решења, јер се за свако целобројно к добије уређени пар $(x, y) = (25\text{-}7к, 3к\text{+}2)$ који је решење дате једначине. Δ

Овај поступак који је у теорији познат као Ојлеров[i] често није функционалан, јер се до коначног решења долази преко неколико итерација.

<u>ПРИМЕР 89.</u> Одредити сва решења једначине $40y - 63x = 521$ ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 40 и 63 узајамно прости бројеви једначина има решење.

Из дате једначине је 40y = 63x + 521, па је $y = \frac{80x + 520 + 1 - 17x}{40}$.

Следи да је $y = 2x + 13 - \frac{17x - 1}{40}$. Да би y био цео број мора бити $\frac{17x - 1}{40} = a$, где је а неки цео број. Како је 17x – 1 = 40a, то следи да је $x = \frac{40a + 1}{17} = 2a + \frac{6a + 1}{17}$. Сада ће x бити цео број ако је $\frac{6a + 1}{17} = b$.

Одавде је 6a + 1 = 17b. Дакле, $a = \frac{17b - 1}{6} = 3b - \frac{b + 1}{6}$. Да би а био цео број мора бити b + 1 = 6к, одакле је b = 6к – 1. Тада је a = 3(6к -1) – к = 17к – 3, а одавде је x = 2(17к – 3) + 6к - 1 = 34к – 6 + 6к – 1 = 40к – 7. Коначно, y = 2 (40к – 7) + 13 – a = 80к - 14 + 13 - 17к + 3 = 63к + 2. Дакле, опште решење дате једначине је x = 40к – 7, y = 63к + 2.

Међутим, иако је изложени поступак једноставан, он није лак за техничку реализацију. Зато се поставља питање налажења сигурнијег метода.

6.3. МЕТОД ПОЧЕТНОГ РЕШЕЊА

Нека је (x_0, y_0) једно целобројно решење једначине ax + by = c, где су a и b узајамно прости цели бројеви. Како је $ax_0 + by_0 = c$, то је и $ax + by = ax_0 + by_0$. Тада је $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Ако се цела једначина подели са b (јер b није нула) добија се да је $\frac{a}{b}(x - x_0) + y - y_0 = 0$. Како је десна страна једнакости цео број то мора бити и лева. Бројеви a и b су узајамно прости цели бројеви, што значи да $x - x_0$ мора бити дељиво са b. Дакле, $x - x_0 = кb$, где је к било који цео број. Тада је $x = x_0 + bк$, а $y = y_0 - aк$. Тиме је добијен један рационалан поступак за решавање једначине ax + by = c који је прецизиран следећом теоремом.

<u>*ТЕОРЕМА 5.*</u> *Ако је уређени пар (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине ax + by = c (ab ≠ 0 и a и b су узајмно прости цели бројеви), тада и само тада је релацијама $x = x_0 + bk$ и $y = y_0 - aк$ (к је цео број) дефинисано опште решење дате једначине.*

ДОКАЗ: Доказ да ако је (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине ax + by = c, да су тада сва решења дефинисана релацијама $x = x_0 + bк$ и $y = y_0 - aк$ (к је цео број) дат је у претходном разматрању.

Остаје да се докаже чињеница да ако је (x_0, y_0) једно решење и ако је $x = x_0 + b\text{к}$ и $y = y_0 - a\text{к}$ (к је цео број), да x и y задовољавају једначину $ax + by = c$. Заиста $ax + by = a(x_0 + b\text{к}) + b(y_0 - a\text{к}) = ax_0 + ab\text{к} + by_0 - ba\text{к} = ax_0 + by_0 = c$, јер је (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$.

Докажимо и да других решења нема. Претпоставимо да је (α, β) једно од решења дате једначине које се не може приказати у облику $(x_0 + b\text{к}, y_0 - a\text{к})$.

Ако је (α, β) једно решење дате једначине, онда је $a\alpha + b\beta = c$. Како је за свако целобројно к и $a(x_0 + bk) + b(y_0 - a\text{к}) = c$, то је $a(x_0 + bk) + b(y_0 - a\text{к}) = a\alpha + b\beta$. Тада је $a(x_0 + bk - \alpha) + b(y_0 - a\text{к} - \beta) = 0$.

Како су a и b различити од 0, то је $x_0 + bk - \alpha = -\dfrac{b(y_0 - a\text{к} - \beta)}{a}$.

Због тога што су a и b узајамно прости бројеви следи да је $y_0 - a\text{к} - \beta$ дељиво са a, па $y_0 - a\text{к} - \beta = a$ $(m\in Z)$. Следи да је $\beta = y_0 - a\text{к} - am = y_0 - a(\text{к} + m)$. Ако је $\text{к} + m = n$ $(n\in Z)$, тада је $\beta = y_0 - an$. У том случају је $x_0 + bk - \alpha = -bm$, па је $\alpha = x_0 + bk + bm = x_0 + b(k + m) = x_0 + bn$. Коначно се добија$\alpha = x_0 + bn$, $\beta = y_0 - an$, што је противуречност са претпоставком. ◊

<u>ПРИМЕР 90.</u> Одредити сва решења једначине $4x + 5y = 100$, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Очигледно је $x_0 = 0$, $y_0 = 20$ једно решење дате једначине. Тада су сва решења дате једначине дефинисана релацијама $x = 5\text{к}$, $y = 20 - 4\text{к}$ $(\text{к} \in Z)$. Δ

6.4. ДИОФАНТОВ МЕТОД

Претпоставимо да је за линеарну Диофантову једначину $ax + by = c$ (a и b су узајамно прости), познато једно решење једначине (x_o, y_o), тј нека је $ax_o + by_o = c$. Ако се на решавање линеране једначине примени Диофантов двопараметарски метод, онда се добије трансформација $x = x_o + mt$, $y = y_o + nt$ (m и n су цели бројеви). Тада из једнакости $ax + by = c$, следи да је $a(x_o + mt) + b(y_o + nt) = ax_o + amt + by_o + bnt = c = ax_o + by_o$. Из добијене једнакости следи да је $amt + bnt = 0$, тј. $am + bn = 0$. Решавањем добијене једначине по m добија се $m = -\dfrac{bn}{a}$.

Како m мора бити цео број и како су a и b узајамно прости то је $n = ak$ (к је неки цео број), па се добија да је $m = -bk$. Дакле, формуле $x = x_o - bkt$, $y = y_o + akt$ генеришу решења једначине $ax + by = c$.

За к = 1, односно к = - 1 добијају се формуле ($x = x_o - bt$, $y = y_o + at$), односно ($x = x_o + bt$, $y = y_o - at$) идентичне формулама у теореми 4.

6.5. ПРИМЕНА ЕУКЛИДОВОГ АЛГОРИТМА У ОДРЕЂИВАЊУ ПОЧЕТНОГ РЕШЕЊА

У примени алгоритма датог у теореми 4. једини проблем може бити одређивање тог једног (партикуларног) решења (x_0, y_0). Један од могућих начина за коректно решавање тог проблема је примена Еуклидовог алгоритма и теореме 2,[22] којим се ефикасно одређује једно од бесконачно много могућих решења.

<u>ПРИМЕР 91.</u> Одредити почетно решење, а потом решити Диофантову једначину $155x - 95y = 100$.

РЕШЕЊЕ: Дата једначина има решење, јер је $d(155, 95) = 5$, а $5 \mid 100$. Према томе једначина се дељењем са 5 може упростити, тако да се добије $31x - 19y = 20$. Како је $d(31, 19) = 1$, то постоје цели бројеви α и β такви да је $31\alpha - 19\beta = 1$. Бројеви α и β се одређују Еуклидовим алгоритмом:

$$31 = 1\cdot 19 + 12;\; 19 = 1\cdot 12 + 7;\; 12 = 1\cdot 7 + 5;\; 7 = 1\cdot 5 + 2;\; 5 = 2\cdot 2 + 1.$$

$$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2(7 - 1\cdot 5) = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 3(12 - 1\cdot 7) - 2\cdot 7 = 3\cdot 12 - 5\cdot 7 = 3\cdot 12 - 5(19 - 1\cdot 12) = 8\cdot 12 - 5\cdot 19 = 8(31 - 1\cdot 19) - 5\cdot 19 = 8\cdot 31 - 13\cdot 19.$$

Дакле, $\alpha = 8$ и $\beta = 13$. Како је $31\alpha - 19\beta = 1$, то је $20(31\alpha - 19\beta) = 20$, па је $31\cdot 20\alpha - 19\cdot 20\beta = 20$, па је $x_o = 20\alpha = 20\cdot 8 = 160$ и $y_o = 20\beta = 20\cdot 13 = 260$.

Према томе опште решење дате линеарне Диофантове једначине дато је формулама: $x = 160 + 19к$; $y = 260 + 31к$ (к је цео број).

Иначе постоје "мања" почетна решења $(x_o, y_o) = (8, 12)$, али се тешко другачије могу одредити сем интуицијом или погађањем. Δ

---

22 Видети: Ратко Тошић, Вања Вукославчевић: Елементи теорије бројева – Алеф, Нови Сад, 1995. - стр. 61. (пример 2)

6.6. ПРИМЕНА ЛИНЕАРНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Линеарне Диофантове једначине нису саме себи циљ и познавање алгоритма за њихово решавање не значи ништа уколико се он не примени у подесним ситуацијама. Следећи примери ће показати колико су линеарне Диофантове једначине моћно средство за решавање разних Диофантових проблема теоријске, али и практичне природе.

ПРИМЕР 92. *Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је 4x + 7y = 2005.*

РЕШЕЊЕ: Како је $4 \cdot 496 + 7 \cdot 3 = 2005$, то је почетно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (496, 3)$. Опште решење је тада x = 496 – 7к; y = 3 + 4к (к је цео број). Оно што се тражи је да x и y истовремено буду природни, па мора бити: x = 496 – 7к > 0 и y = 4к + 3 > 0. Из прве неједнакости је 7к < 496, па је к ≤ 70. Због друге неједнакости је 4к > - 3, што значи да је к ≥ 0. Према томе 0 ≤ к ≤ 70, па се добија тачно 71 решење код кога су x и y позитивни бројеви. Δ

ПРИМЕР 93. *У једној књижари оловка кошта 0,5 (пола) €, свеска 1 €, а књига 5 €. На колико се начина за тачно 100 € може купити тачно 100 предмета? Колико од 100 купљених предмета су оловке, свеске и књиге?*

РЕШЕЊЕ: Нека је број купљених оловки x, број свески y и број књига z. Тада је x + y + z = 100, јер их укупно има 100. Цена купљених предмета је $\frac{1}{2}2x + y + 5z = 100$. Две добијене једначине представљају систем Диофантових једначина са три непознате. Ако се од прве једначине одузме друга добија се $\frac{1}{2}x - 4z = 0$. Следи да је x = 8z. Тада је 8z + y + z = 100, па је y = 100 - 8z. Према томе опште решење добијеног система једначина је: x = 8к; y = 100 – 9к; z = к. С обзиром да је 0 ≤ x = 8к ≤ 100, то је 0 ≤ к ≤ 12.

Сва "реална" решења проблема дата су у следећој табели, јер теоријски проблем има бесконачно решења, али реално, у животној ситуацији свега 12:

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
у	100	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

У наредним примерима нема експлицитно линеарних Диофантових једначина, али је линеарна једначина инструмент за решавање проблема.

ПРИМЕР 94. *Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је* $7x^2 - 3y^2 = 17$.

РЕШЕЊЕ: Нека је $x^2 = a$ и $y^2 = b$. Дата једначина је тада еквивалентна са једначином $7a - 3b = 17$ ($a \geq 0$, $b \geq. 0$). Једно решење дате једначине је $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, па је опште решење једначине $7a - 3b = 17$, дато формулама $a = 3к + 2$, $b = 7к - 1$. Дакле, $x^2 = 3к + 2$ и $y^2 = 7к - 1$. Како је $x^2 = 3к + 2$, то једначина нема решења, је није могуће да иједан квадрат природног броја при дељењу са 3 даје остатак 2. Δ

ПРИМЕР 95. *Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост:* $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 7$?[23]

РЕШЕЊЕ: Ако је $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 7$, онда је $3x^2 - 3xy + 3x - 2xy + 2y^2 - 2y - 7x + 7y - 7 = 0$. То значи да је $3x(x - y + 1) - 2y(x - y + 1) - 7(x - y + 1) = 0$, па је $(x - y + 1)(3x - 2y - 7) = 0$. Јасно је да мора бити $x - y + 1 = 0$ или $3x - 2y - 7 = 0$. Према томе дата једначина има бесконачно много решења која су описана формулама општих решења: 1) $x = к$ и $y = к + 1$; 2) $x = 2к + 1$ и $y = 3к - 2$ (к је цео број). Δ

ПРИМЕР 96. *Нека су* $x_1, x_2, \ldots x_{2005}$ *природни бројеви такви да је* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2005}^2 = 2035$. *Одредити* $x_1, x_2, \ldots x_{2005}$.

[23] Овај проблем се може успешно решити и Диофантовим методом.

РЕШЕЊЕ: Очигледно је већина бројева x_i једнака 1, а само неки од њих већи од 1. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_к \geq 2$, а сви остали $x_{к+1} = \ldots = x_{2005} = 1$. Тада је $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_к^2 \geq 4к$, па је због тога $2035 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_к^2) + (x_{к+1}^2 + \ldots + x_{2004}^2 + x_{2005}^2) \geq 4к + (2005 - к) = 3к - 2005$. Из неједнакости $2035 \geq 3к - 2005$ следи да је $3к \leq 30$, па је $к \leq 10$. Дакле $x_{11} = \ldots = x_{2005} = 1$, па је $x_{11}^2 + x_{13}^2 + \ldots + x_{2005}^2 = 2005 - 10 = 1995$. Према томе $x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = 2035 - 1995 = 40$.

Ако у скупу $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ има a јединица, b двојки, c тројки, d четворки, e петица и f шестица, онда је: $a + b + c + d + e + f = 10$ и $a + 4b + 9c + 16d + 25e + 36f = 40$. Ако се од друге одузме прва једначина добије се линеарна Диофантова једначина $b + 8c + 15d + 24e + 35f = 30$. Одмах је јасно да је $f = 0$. Ако је $e = 1$, онда је $3b + 8c + 15d = 7$. У том случају би било $b = 2$, а сви остали би били 0, па би било $a + b + c + d + e + f = 3$, што је немогуће, јер тај збир износи 10. Дакле $e = 0$, па је $3b + 8c + 15d = 30$. Како су 3b, 15d и 30 дељиви са 3, то мора бити и 8c, па се разлику два случаја $c = 3$ или $c = 0$.

1) Ако је $c = 3$, онда је $3b + 24 + 15d = 30$, па је $b + 5d = 2$ и има једно решење:

- $b = 2$ и $d = 0$, $c = 3$, $e = f = 0$, $a = 5$, па је $3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 27 + 8 + + 2000 = 2035$ (3 тројке, 2 двојке и 2000 јединица);

2) Ако је $c = 0$, онда је $3b + 15d = 30$, па је $b + 5d = 10$ и има три решења:

- $b = 10$, $a = c = d = e = f = 0$, па је $2^2 + \ldots 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 40 + 1995 = 2035$ (10 двојки и 1995 јединица);
- $b = 5$ и $d = 1$, $c = e = f = 0$, $a = 4$, па је $4^2 + 2^2 + \ldots 2^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 16 + 20 + 1999 = 2035$ (1 четворка, 5 двојки и 1999 јединица);
- $b = 0$ и $d = 2$, $c = e = f = 0$, $a = 8$, па је $4^2 + 4^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 = 32 + 2003 = 2035$ (2 четворке и 2003 јединица);

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

445. Влада је купио свеске по цени од 7 динара и оловке по цени од 4 динара и за то потрошио 60 динара. Колико је Влада купио оловки, а колико свески ?

446. Износ од 2007 динара плаћен је новчаницама од 2 динара и 5 динара. Колико је којих новчаница било ?

447. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $4x + 9y = 58$.

448. У једном разреду било је 15 девојчица и 18 дечака. Како ће они међусобно поделити 1234 кликера тако да сви дечаци добију једнак број кликера и све девојчице, такође, добију једнак број кликера ?

449. Доказати да следеће једначине немају целобројних решења:

a) $3x + 15y = 2006$;

b) $21x - 35y = 88$;

c) $6x^2 - 33y^2 = 4444444$.

450. Одредити једно решење, а затим написати опште решење следећих линеарних Диофантских једначина:

a) $3x - 5y = 77$; b) $4x + 11y = 121$; c) $7x - 100y = 35$.

451. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да важи једнакост: $3x + 7y = 555$?

452. Одредити све природне бројеве који задовољавају једначине:

a) $x + 2y + 3z = 25$;

b) $2x + 3y + 4z = 36$.

453. Одредити природне бројеве x и y тако да је $x^2 + 4y^2 = 244$.

454. У скупу природних бројева решити једначину: $5x^2 + 3y^2 = 1033$

455. Располаже се судовима од 2 и 7 литара. На колико начина се помоћу датих судова може напунити буре чија је запремина 1234 литра. Који је најбржи, а који је најспорији начин да се то уради ?

456. Доказати да се коцка са ивицом дужине 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине 1, 2 или 3. Колико се при том добија коцки чија ивица има дужину 3?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

457. Доказати да за сваки цео број a и сваки цео број b систем једначина $x + y + 2z + 2t = a$ и $2x - 2y + z - t = b$ има решење у скупу целих бројева. (Мађарска – 1926.)

458. Разломак $\frac{281}{140}$ представити као збир три разломка чији су и бројиоци и имениоци једноцифрени бројеви. (Србија 1969.)[24]

[24] Ово је први проблем који се своди на Диофантову једначину који се појавио на математичким такмичењима у нашој земљи.

459. Одредити троцифрени број чије су све цифре различите од нуле, а збир свих различитих двоцифрених бројева састављених од цифара овог броја једнак је том броју. (Србија 1979.)

460. Нека су n и к природни бројеви. Ако се са $p_к$ означи број ненегативних целих решења једначине $кx + (к + 1)y = n - к + 1$, израчунати суму $p_1 + p_2 + ... + p_{n+1}$. (СФРЈ 1978.)

461. На колико начина се број 1984 може представити као збир узастопних природних бројева и који су то бројеви. (Србија 1984.)

462. Одредити шестоцифрен број чији производи са 2, са 3, са 4, са 5 и са 6 представљају такође шестоцифрене бројеве који се пишу у истим цифрама као и тражени број. (Србија - 1990.)

463. Коцка ивице 13 cm исечена је на 1994 мање коцке са целобројном дужином ивица. Колике су димензије добијених коцки и колико којих коцки има? (СРЈ - 1994.)

464. Одредити све троцифрене бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара (Србија - 1995.)

465. У соби се налазе столице са 3 и са 4 ноге. Када на све столице седну људи, у соби је укупно 69 ногу. Колико у соби има столица са 3, а колико са 4 ноге? (Србија - 1995.)

466. Ученик треба да реши 20 задатака. За свако тачно решење добија 8 поена, за нетачно решење му се одузима 5 поена, а задатак који није решавао се не бодује. Ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је тачно решио? (СРЈ – 1995.)

467. Одреди колико парова природних бројева (x,y) задовољава једначину $3x + 8y = 1996$. (Србија – 1996.)

468. У координатној xOy равни дата је тача M са координатама (5, 3). Кроз тачку M конструисана је права p која координатне осе сече у тачкама A (a, 0) и B (0, b). Одредити све вредности a и b тако да су и a и b природни бројеви. (Србија – 1997.)

469. Ако се између цифара двоцифреног природног броја напише нула добија се број који је 9 пута већи од датог. Одредити о којим бројевима је реч ? (Србија - 1998.)

470. У xOy координатној равни дата је права $4x + 7y = 1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате целобројне и припадају првом квадранту координатне равни ? (Србија – 1998.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

471. На складишту се налазе ексери упаковани у сандуке од 16, 17 или 40 килограма. Како, не отварајући сандуке купцу испоручити тачно 100 kg екесера ?

472. Према источњачкој бајки "Шехерезада" (из збирке "Приче из хиљаду и једне ноћи"), девојка Шехерезада је из ноћи у ноћ причала моћном султану по 3 или по 5 бајки. За колико је највише ноћи могла да исприча 1001 причу ? За колико је ноћи најбрже то могла да учини ? Колико разних комбинација за исказивање свих прича постоји ?

473. Колико решења у скупу природних бројева има једначина $ax + by = c$, где су a и b узајамно прости цели бројеви?

7. ЈЕДНОСТАВНИЈЕ КВАДРАТНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

7.1. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $xy = n \ (n \in N)$

Диофантова једначина xy = n ($n \in N$) има увек решења у скупу природних (а и целих) бројева и њено решавање није проблем, јер се своди на одређивање свих чинилаца броја n. Зато ће се ово разматрање односити на одређивање броја решења једначине xy = n ($n \in N$), јер се модел одређивања броја решења већине једначина заснива на моделу пребројавања броја решења управо ове једначине.

<u>ПРИМЕР 97.</u> Колико решења (x, y) има једначина $xy = p^n$, ако су x, y и n природни, а p прост број.

РЕШЕЊЕ: Једини делиоци броја p^n су 1, p, p^2, p^3, ... , p^n па дата једначина има n + 1 решење, јер x узима све вредности од 1 до p^n, а y вредности $\frac{p^n}{x}$. Δ

<u>ПРИМЕР 98.</u> Ако је n = $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ канонски облик природног броја онда је број решења једначине Диофантове једначине xy = n у скупу природних бројева $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

РЕШЕЊЕ: Број x може бити ма који делилац природног броја n. Како n има тачно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ делилаца то једначина xy = n, у скупу природних бројева има $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ решења. ◊

<u>ПРИМЕР 99.</u> Одредити најмањи природан број n, тако да једначина xy = n има 10 решења.

РЕШЕЊЕ: Како је $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 10$, то постоји неколико могућности:

1) $\alpha_1 + 1 = 10, \alpha_2 + 1 = \alpha_3 + 1 = \ldots = \alpha_k + 1 = 1$. Тада је $n = 2^9 = 512$.

2) $\alpha_1 + 1 = 5, \alpha_2 + 1 = 2, \alpha_3 + 1 = \ldots = \alpha_k + 1 = 1$. Тада је $n = 2^4 \cdot 3 = 48$.

3) $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 5$, $\alpha_3 + 1 = ... = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 2\cdot 3^4 = 162$.

4) $\alpha_1 + 1 = 1$, $\alpha_2 + 1 = 10$, $\alpha_3 + 1 = ... = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 3^9$.

Најмањи такав природан број је n = 48.

<u>ПРИМЕР 100.</u> Колико уређених тројки (x, y, z) природних бројева x, y и z задовољава једначину xyz = 12.

РЕШЕЊЕ: Ако је x = 1, онда је $yz = 12 = 2^2\cdot 3$, па једначина има $3\cdot 2$ = 6 решења. Ако је x = 2, онда је $yz = 6 = 2\cdot 3$, па једначина има $2\cdot 2 = 4$ решења. У случају x = 3, $yz = 4 = 2^2$, па једначина има 3 решења. Уколико је x = 4 или x = 6, тада је yz = 3 односно yz = 2, па једначина има по 2 решења. И на крају, ако је x = 12, онда је yz = 1, па једначина има 1 решење. Једначина има укупно 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18 решења.

<u>ПРИМЕР 101.</u> Колико решења у скупу природних бројева има једначина $xyz = p^n$, ако је p прост, а n природан број.

РЕШЕЊЕ: Ако је x = 1, онда је $yz = p^n$ и једначина има n + 1 решење. Уколико је x = p, онда је $yz = p^{n-1}$ и једначина има n решење. Ако је $x = p^2$, онда је $yz = p^{n-2}$ и једначина има n - 1 решење, ... Уколико је $x = p^n$, онда је yz = 1 и једначина има 1 решење. Дакле, укупно има 1 + 2 + ... + $n - 1 + n + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ решења.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

474. Колико решења у скупу природних бројева има једначина xy = pq ако су p и q прости бројеви?

475. Колико решења у скупу природних бројева има једначина xyz = pqr ако су p, q и r прости бројеви?

7.2. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - y^2 = n \ (n \in N)$

Диофантова једначина $x^2 - y^2 = n$, где су x, y и n природни бројеви, је веома интересантна за анализу, јер се за сваки природан број n једначина лако решава коришћењем производа. Међутим, пре општег разматрања броја решења ове једначине, треба погледати неколико конкретних примера.

ПРИМЕР 102. *Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : a) $x^2 – y^2 = 24$; b) $x^2 – y^2 = 18$; c) $x^2 – y^2 = 25$.*

РЕШЕЊЕ: a) Како је $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 24 = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6$ и како су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности, то у обзир долазе само комбинације $x + y = 12$, $x – y = 2$, или $x + y = 6$, $x – y = 4$, па су решења дате једначине $(x, y) = (7, 5)$ или $(x, y) = (5, 1)$.

b) Слично из $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 18 = 1\cdot 18 = 2\cdot 9 = 3\cdot 6$ следи да дата једначина нема решења, јер не постоји ниједна комбинација таква да су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности.

c) Како је $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 25 = 1\cdot 25 = 5\cdot 5$ и како су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности, то у обзир долазе комбинација $x + y = 25$, $x – y = 1$, или $x + y = 5$, $x – y = 5$, па је једино решење дате једначине $(x, y) = (13, 12)$, јер друга комбинација даје решење $(x, y) = (5, 0)$ које не одговара условима задатка, зато што y није природан број.

Ако је канонски облик природног броја $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, онда једначина $x^2 – y^2 = (x + y)(x – y) = n$ има решења ако су бројеви $x + y$ и $x – y$ исте парности, а то значи оба парна или оба непарна.

Број $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ има укупно $S = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_к + 1)$ делилаца, од којих су $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ непарни. Дакле број парних делилаца је $P = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots(\alpha_к + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Шта се дешава са решењима дате једначине за разне вредности броја α_1 најбоље илуструје следећи пример

ПРИМЕР 103. *Ако је природан број $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, онда је број решења квадратне Диофантове једначине $x^2 – y^2 = n$ у скупу природних бројева једнак* $r = \left[\dfrac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2 + 1)\cdot \ldots \cdot(\alpha_k + 1)}{2} \right]$[25].

Доказ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $\alpha_1 = 0$, онда је број n непаран и $P = 0$, па су сви делиоци броја n непарни и има их тачно N. Тада је број решења једначине $x^2 – y^2 = n$ једнак броју парова $(x + y, x – y)$ а он је једнак половини укупног броја делилаца, јер је $x + y > x - y$ и сваки број $x + y$ има свој комплементаран делилац $\dfrac{n}{x + y} = x - y$.

[25] $[\,x\,]$ је ознака за највећи цео број који није већи од броја x.

Како N може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат), то $\frac{N}{2}$ може бити природан број, али и не мора бити. Зато је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у овом случају $r = \left[\frac{N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$, јер када је $x^2 - y^2 = n = m^2$, пар $x + y = x - y = m$ отпада, пошто ће тада вредност y бити 0. Како је $|\alpha_1 - 1| = |0 - 1| = 1$ то је $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$.

2) Ако је $\alpha_1 = 1$, онда је $n = 2(2m + 1)$, тј број n је паран, али није дељив са 4. Тада је $P = N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ и тада, сваки паран делилац има свој комплементаран непаран делилац (и обрнуто). То значи да бројеви $x + y$ и $x - y$ никада нису исте парности, што истовремено значи да једначина $x^2 - y^2 = n$ у овом случају нема решења, тј. $r = 0$. Како је $|\alpha_1 - 1| = |1 - 1| = 0$, то је $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right] = 0$

3) Ако је $\alpha_1 \geq 2$, онда је n број који је дељив са 4 и број парних делилаца $P = \alpha_1(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_к+ 1)$ је веће од $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Тада сваки непаран делилац има свој комплементарни парни делилац и у тим случајевима једначина $x^2 - y^2 = n$ нема решења, јер су бројеви $x + y$ и $x - y$ различите парности. Једначина има решења само када су бројеви $x + y$ и $x - y$ оба парни. Таквих делилаца има $P - N = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Број решења је једнак броју парова $(x + y, x - y)$ који су исте парности (оба парна). Тада је $r = \left[\frac{P-N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$, при чему се цео део узима јер и у овом случају број делилаца $\frac{P-N}{2}$ може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат). Како је α_1 веће од 1, то је $\alpha_1 - 1 = |\alpha_1 - 1|$, па је број решења дате једначине $r = \left[\frac{|\alpha_1-1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$. ◊

Следећи пример показује како формула дата у претходној теореми. "ради" за разне случајеве.

<u>*ПРИМЕР 104.*</u> *Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : a) $x^2 - y^2 = 45$; b) $x^2 - y^2 = 225$; c) $x^2 - y^2 = 34$.*

РЕШЕЊЕ: a) Како је $45 = 2^0 3^2 5^1$, то је број решења једначине $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)\cdot(1+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 2}{2}\right] = 3$.

b) Како је $225 = 2^0 3^2 5^2$, то је број решења $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)(2+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 3}{2}\right] = 4$.

c) Како је $34 = 2^1 17^1$, то је број решења $r = \left[\frac{|1-1|(1+1)}{2}\right] = 0$.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

476. Ако је к природан број, онда једначина $x^2 - y^2 = 2^к$, има $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ решења у скупу природних бројева.

477. Ако је p непаран прост број, онда једначина $x^2 - y^2 = p$, има само једно решење у скупу природних бројева. Доказати.

478. Одредити природан број n, тако да једначине $x^2 - y^2 = 2^n$ има 2006 решења у скупу природних бројева.

479. Постоји ли природан број n, такав да једначина $x^2 - y^2 = 36^n$ има 49 решења у скупу природних бројева.

480. Доказати да једначина $x^2 - y^2 = 7^n$ има за сваки природан број n, више решења него једначина $x^2 - y^2 = 2^n$.

481. Одредити природан број n, тако да једначине $x^2 - y^2 = 200$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имају једнак број решења у скупу природних бројева.

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

482. Ако је p непаран прост број, онда једначина $x^2 - y^2 = p^к$, где је к неки природан број, има $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ решења у скупу природних бројева. Доказати.

483. Ако је канонски облик броја $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ онда је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева $r = 2\left|\alpha_1 - 1\right|(\alpha_2+1)\cdot...\cdot(\alpha_k+1)$.

484. Број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева је увек паран број. Доказати.

7.3. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = n$ $(n \in N)$

Код једначине $x^2 + y^2 = n$ није могуће, као код претходна два типа једначина експлицитно извести формулу за одређивање броја решења, али у ери рачунара за то вероватно и нема потребе. Ако једначина $x^2 + y^2 = n$ у скупу целих бројева има решење, број решења је коначан, јер је $|x| \le \sqrt{n}$ и $|y| \le \sqrt{n}$. Зато је код ове једначине већа потреба утврђивање егзистенције решења, јер се елиминацијом оних једначина које немају решења у многоме посао олакшава.

Анализом неколико првих природних бројева ($1^2 + 0^2 = 1$, $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 0^2 = 4$, $2^2 + 1^2 = 5$, $2^2 + 2^2 = 8$, $3^2 + 0^2 = 9$, $3^2 + 1^2 = 10$, $3^2 + 2^2 = 13$, …), уочава се да једначина има решења за неке вредности броја n који је облика 4к, 4к + 1, 4к + 2. Међутим, једначине $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 11$ ... у опште $x^2 + y^2 = n = 4к + 3$ немају решење, јер израз $x^2 + y^2$ при дељењу са 4 може имати само остатке 0, 1, 2. Зато се може формулисати следеће тврђење:

<u>ПРИМЕР 105.</u> Ако је $n = 4k + 3$ $(к \in Z)$, онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева. Доказати.

РЕШЕЊЕ: Како је 4к + 3 непаран број, то је један од бројева x и y паран, а други непаран. Нека је $x = 2m$, а $y = 2p + 1$. Тада је $x^2 + y^2 = 4m^2 + 4p^2 + 4p + 1 = 4к + 3$. Следи да је $4(m^2 + p^2 + p) = 4к + 2$. Како је лева страна једнакости дељива са 4, а десна није, то једначина нема решења. ◊

Међутим, може се доказати и општије тврђење.

<u>ПРИМЕР 106.</u> Ако је $n = 2^к(4m + 3)$, онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева, при чему су к и m ненегативни цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $к = 0$, онда се проблем своди на пример 112.

2) Ако је $к = 1$, онда је $x^2 + y^2 = n = 8m + 6$, па су x и y или оба парна или оба непарна. Ако су оба парна, онда је збир њихових квадрата дељив са 4, што у овом случају очигледно није. Ако су оба непарна онда је $x = 2p + 1$, а $y = 2q + 1$, па је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 8m + 6$. Следи да је $4(p^2 + p + q^2 + q) = 8m + 4$, а дељењем са 4 се добија $p(p + 1) + q(q + 1) = 2m + 1$. Како је лева страна једнакости парна (због збира производа по два узастопна броја), а десна непарна, то једначина нема решења.

3) Ако је $к \geq 2$ онда се сменом $x = 2^{[к/2]} a$, $y = 2^{[к/2]}b$ (a и b су природни бројеви) једначина своди на један од претходна два случаја (први, ако је к паран и други случај ако је к непаран број). ◊

Дакле, сада се зна да једначина $x^2 + y^2 = n$ за $n \in \{3, 7, 11, \ldots 6, 14, 22, \ldots 12, 28, 44, 60, \ldots\}$, тј za $n = 2^k(4m + 3)$ ($k \in N_o$, $m \in N$) нема решења у скупу целих бројева.

Како бројева облика $2^k(4m + 3)$ ($k \in N_o$, $m \in N$) има бесконачно, без доказа се може констатовати да је непосредна последица претходног разматрања:

<u>ПРИМЕР 107.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева.

Међутим, важно је испитати и да ли и када дата једначина има решења.

<u>ПРИМЕР 108.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Ако је $n = 25к^2$ ($к \in N$), онда је $x = 3к$, $y = 4к$ једно решење једначине $x^2 + y^2 = 25к^2$, чиме је доказ завршен. ◊

Међутим, могу се извести и општији докази. На пример, ако је $n = к^2$ ($к \in N$, $к \geq 5$) онда се добија "Питагорина" једначина $x^2 + y^2 = к^2$, па су њена решења $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $k = p^2 + q^2$ ($p > q$; $(p,q) = 1$; p и q су различите парности), о чему ће ускоро бити речи.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

485. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

486. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

487. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 1 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

488. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 1 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

489. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

490. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

491. Доказати да једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ ($n \in N$) имају једнак број решења у скупу целих бројева.

7.4. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = n$ ($n \in N$)

Једначина овог облика је већ била предмет разматрања.[26] Из примера 36. следи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = n$ нема решења ако је n облика 8к – 1, тј. ниједан природан број облика 8к – 1 се не може приказати као збир квадрата три цела броја.

Остаје да се прикаже један од могућих начина за решавања Диофантове једначине $x^2 + y^2 + z^2 = n$ ($n \neq 8к – 1$).

<u>ПРИМЕР 109.</u> Одредити целе бројеве x, y, z такве да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2005$.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су два од тражених бројева x, y, z парни, а трећи непаран. Нека је x = 2a, y = 2b и z = 2z + 1. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 2005$. Даљом трансформацијом добија се $a^2 + b^2 + c(c + 1) = 501$. Како је c(c + 1) паран број, то a^2+b^2 мора бити непаран број, па је један од бројева a и b паран, а други непаран. Дакле, a = 2d и b = 2e + 1, па се добија једнакост $4d^2 + 4e^2 + 4e + c(c + 1) = 500$. Очигледно је да c(c + 1) мора бити дељиво са 4.

Доња таблица приказује могуће вредности за c(c + 1) и a^2+b^2. Као потенцијална решења елиминишемо вредности c(c + 1) које нису дељиве са 4 (коментар 1) и вредности a^2+b^2 које као фактор имају број облика 4к+3 на непарном степену (коментар 2):

[26] Видети примере 30. и 37.

c	c(c+1)	a^2+b^2	Ком. 1	Ком. 2
0	0	501	-	-
1	2	499	-	
2	6	495	-	
3	12	489	+	-
4	20	481	+	$20^2 + 9^2$
5	30	471	-	-
6	42	459	-	-
7	56	445	+	$21^2 + 2^2$
8	72	429	+	-
9	90	411	-	-
10	110	391	-	
11	132	369	+	$12^2 +15^2$
12	156	345	+	-
13	182	319	-	
14	210	291	-	-
15	240	261	+	-
16	272	229	+	$15^2 + 2^2$
17	306	195	-	-
18	342	159	-	-
19	380	121	+	$11^2 + 0^2$
20	420	81	+	$9^2 + 0^2$
21	462	39	-	-

Из табеле је јасно да дата једначина има 6 решења у скупу целих ненегативних бројева. При том свако решење, због симетричности једначине, подразумева и све пермутације добијених бројева. То значи да наредна таблица садржи само почетну пермутацију, а да се остале због учињене напомене подразумевају:

a	b	c	x	y	z	$x^2 + y^2 + z^2$
20	9	4	40	18	9	1600 + 324 + 81 = 2005
21	2	7	42	4	15	1764 + 16 + 225 = 2005
15	12	11	30	24	23	900 + 576 + 529 = 2005
15	2	16	30	4	33	900 + 16 + 1089 = 2005
11	0	19	22	0	39	484 + 0 + 1521 = 2005
9	0	20	18	0	41	324 + 0 + 1681 = 2005

Може се запазити да су међу добијеним решењима и једина два решења једначине $x^2 + y^2 = 2005$ ((22, 39), (18, 41)), као и да се прво решење једначине $40^2 + 9^2 + 18^2 = 41^2 + 18^2 = 2005$ у ствари трансформише из решења (18, 41).

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

492. Да ли једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2006$ има решења у скупу целих бројева?.

493. Доказати да једначина $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2007$ има решење у скупу целих бројева?

494. Доказати да за сваки природан број n постоје природни бројеви x, y и z такви да је $x^2 + y^2 – z^2 = n$.

7.5. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ $(n \in N, n \geq 4)$

Француски математичар Лагранж[27] је доказао да се сваки природан број n може приказати као збир квадрата четири цела броја,[28] тј. да Диофантова једначина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$ има решење за сваки природан број n.[29]

Дакле, остаје да се одређују конкретне репрезентације сваког природног броја у виду збира четири квадрата и пребројава колико таквих репрезентација постоји.

ПРИМЕР 110. Број 2005 приказати као збир квадрата четири цела броја на бар један од могућих начина.

РЕШЕЊЕ: Из претходног примера може се направити неколико таквих репрезентација, без амбиције да су то и све репрезентације, при чему се репрезентације не праве додавањем нула:

[27] Лагранж - J. L. Lagrange (1736 – 1813)

[28] Доказ ове Лагранжове теореме видети у [7.142.] - стр. 70-72.

[29] У вези са овим треба поменути и Варингов проблем који је формулисан 1770. године, којим је постављена хипотеза да се сваки природан број може написати као збир 4 квадрата, збир 9 кубова, 12 бројева четвртог степена... (Edvard Waring 1734-1798, енглески математичар)

- $40^2 + 18^2 + 9^2 = 24^2 + 32^2 + 18^2 + 9^2 = 2005$;
- $42^2 + 4^2 + 15^2 = 42^2 + 4^2 + 12^2 + 8^2 = 2005$;

Следећих неколико четворки нису изведене из претходног примера:

- $44^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 2005$;
- $38^2 + 23^2 + 6^2 + 6^2 = 2005$.

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ ($к \in N$) је за $к > 4$, са аспекта решивости, мање атрактивна за истраживање, али би било интересантно истражити да ли постоји и каква је законитост расподеле броја решења дате једначине зависно од броја n, као и броја сабирака к.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

495. Број 981 приказати у облику збира четири квадрата.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

496. Одредити сва разлагања броја 2001 у облику збира 1997 квадрата природних бројева (СФРЈ 1979.)

497. Доказати да постоји бесконачно много тројки узастопних природних бројева од којих је сваки збир два потпуна квадрата. (пример $72 = 6^2 + 6^2$; $73 = 8^2 + 3^2$; $74 = 5^2 + 7^2$) (СФРЈ 1986.)

8. ПИТАГОРИНА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = z^2$

Један од најзанимљивијих проблема теорије бројева свакако је проблем Питагориних бројева, тј. питање решења Питагорине Диофантове једначине.

Питагориним бројевима или Питагориним тројкама (x, y; z) називају се природни бројеви x, y и z који задовољавају Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$.

Троугао чији су мерни бројеви страница x, y и z природни бројеви који задовољавају релацију $x^2 + y^2 = z^2$ назива се Питагорин троугао.[30]

<u>*ПРИМЕР 111.*</u> *Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и тројка (y, x; z) Питагорина тројка.*

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да ако важи да је $x^2 + y^2 = z^2$, онда важи и $y^2 + x^2 = z^2$, што значи да ако је (x, y ; z) Питагорина тројка онда је и (y, x; z) такође Питагорина тројка. Δ

<u>*ПРИМЕР 112.*</u> *Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и (кx, кy; кz) такође Питагорина тројка (к је природан број).*

РЕШЕЊЕ: Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је $x^2 + y^2 = z^2$, али је онда и $к^2x^2 + к^2y^2 = к^2z^2$, што значи да је и $(кx)^2 + (кy)^2 = (кz)^2$. Дакле, (кx, кy; кz) је Питагорина тројка. Δ

<u>*ПРИМЕР 113.*</u> *Питагориних тројки има бесконачно много.*

РЕШЕЊЕ: Како се за сваки природна број к од Питагорине тројке (x, y; z) може добити Питагорина тројка (кx, кy; кz), јасно је да свака Питагорина тројка генерише бесконачно много нових Питагориних тројки. Δ

Питагортина тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако су природни бројеви x, y и z узајамно прости.

Тако су Питагорине тројке (3, 4; 5), (12, 5, 13) и (20, 21, 29) основне, а (12, 16, 20), (24, 10, 26) и (40, 42, 58) изведене, јер су добијене од основних множењем са 4, односно са 2.

<u>*ПРИМЕР 114.*</u> *Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда су x и y природни бројеви различите парности.*

[30] На основу Питагорине теореме такав троугао је правоугли. Зато убудуће кад кажемо страница троугла, онда мислимо на њену дужину и неименујемо мерну јединицу, већ само мерни број

ДОКАЗ: Ако су x и y парни бројеви онда је $x = 2a$ и $y = 2b$ ($a, b \in N$). Тада је NZD(x, y) = NZD(2a, 2b) = 2. То значи да x и y нису узајамно прости јер имају заједнички делилац већи од 1, па ова могућност отпада.

Ако су $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$ ($a, b \in N$) непарни бројеви онда је z паран број, $z = 2c$ ($c \in N$), па се из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, добија $(2a+1)^2 + (2b+1)^2 = (2c)^2$ или $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2$. Како је са десне стране једнакости број који је дељив са 4, а са леве стране број који при дељењу са 4 даје остатак 2, то једнакост није могућа.

Дакле, x и y не могу бити исте парности. Δ

Из претходних примера следи:

<u>*ПРИМЕР 115.*</u> *Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда је z непаран природан број.*

<u>*ПРИМЕР 116.*</u> *Тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако и само ако постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$; $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$, при чему је $m > n$, NZD (m, n) = 1 и m и n су различите парности.*

РЕШЕЊЕ: Нека је x паран, а y и z непарни чланови основне Питагорине тројке (x, y; z). Из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, следи да је $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z – y)$. Бројеви $z + y = 2a$ и $z – y = 2b$ су парни, па је $x^2 = 4ab$.

Треба доказати да су a и b узајамно прости. Ако се претпостави супротно, тј. да a и b имају заједнички делилац d, онда је $z + y = kd$ и $z – y = ld$. Тада је $2z = d(к + l)$, а $2y = d(k – l)$, па y и z нису узајмно прости, што је у супротности са претпоставком да је (x, y; z) основна Питагорина тројка.

Како су a и b узајамно прости, да би $x^2 = 4ab$ био потпун квадрат мора бити $a = m^2$ и $b = n^2$. Тада је $x^2 = 4m^2n^2$, па је $x = 2mn$. Слично је $z + y = 2m^2$ и $z – y = 2n^2$, тј. $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

Да би y био природан број мора бити $m^2 > n^2$, тј. $m > n$. Бројеви m и n морају бити узајамно прости, јер ако би имали заједнички делилац, онда би тај делилац био заједнички и за x, y и z. И на крају m и n морају бити различите парности јер би у супротном x, y и z били парни и имали заједнички делилац 2.

Треба још доказ извести у другом смеру тј. да $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$, јесу елементи Питагорине тројке. Како је $x^2 + y^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2 + m^4 – 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$.

Бројеви x, y и z су узајамно прости, јер када би имали заједнички делилац, онда би он био заједнички делилац и за m и n, што није могуће, јер су m и n узајамно прости. Δ

Претходни пример јасно доказује да ако m и n испуњавају задате услове, онда се добија основна Питагорина тројка. На пример ако је m = 3, а n = 2, онда је x = 12, y = 5 и z = 13. Међутим, важно је напоменути да ако m и n не испуњавају дате услове, опет се добија Питагорина тројка, али она није основна. Тако се за m = 4 и n = 2 добија x = 16, y = 12 и z = 20.

Следећа табела показује како добијено опште решење Питагорине једначине генерише неке основне и изведене Питагорине тројке:

		Основне Питагорине тројке			Изведене Питагорине Тројке					
m	n	x	y	z	к = 2			к = 3		
					x	y	z	X	y	z
2	1	4	3	5	8	6	10	12	9	15
3	2	12	5	13	24	10	26	36	15	39
4	1	8	15	17	16	30	34	24	45	51
4	3	24	7	25	48	14	50	72	21	75
5	2	20	21	29	40	42	58	60	63	87
5	4	40	9	41	80	18	82	120	27	123
6	1	12	35	37	24	70	74	36	105	111
6	5	60	11	61	120	22	122	180	33	183
7	2	28	45	53	56	90	106	84	135	159
7	4	56	33	65	112	66	130	168	99	195
7	6	84	13	85	168	26	170	252	39	255
8	1	16	63	65	32	126	130	48	189	195
8	3	16	55	73	32	110	146	48	165	219

Претходна теорема се може доказати и на друге начине. Наводимо још два доказа основне теореме о Питагориним бројевима, без доказа за релације између параметара m и n, који се може извести аналогно.

8.1. ДИОФАНТОВ ДОКАЗ

Нека је дата једначина $x^2 + y^2 = z^2$. Тада је $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$. Ако се уведе смена $a = \frac{y}{z}$ и $b = \frac{x}{z}$ једначина постаје $a^2 + b^2 = 1$. На добијену једначину се сада примени Диофантов метод.[31] Како је (-1, 0) једно решење добијене једначине следи да је: $a = -1 + mt$ и $b = nt$ (m и n су неки природни бројеви).

Тада је $(mt - 1)^2 + (nt)^2 = 1$, па је $1 - 2m + m^2t^2 + n^2t^2 = 1$. Из ове једнакости се израчунава $t = \dfrac{2m}{m^2 + n^2}$, а одговарајуће вредности за a и b су: $a = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ и $b = \dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$. Ако се врати првобитна смена, добије се $x = 2кmn$, $y = к(m^2 - n^2)$ и $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$. Δ

8.2. АЛГЕБАРСКИ ДОКАЗ[32]

Из $x^2 + y^2 = z^2$ следи $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Ако се од ове релације формира пропорција $\dfrac{x}{z - y} = \dfrac{z + y}{x} = \dfrac{m}{n}$ (m и n су неки природни бројеви), налазимо да је $z + y = \dfrac{mx}{n}$ и $z - y = \dfrac{nx}{m}$. Решавањем претходног система једначина по z и y добија се $\dfrac{z}{x} = \dfrac{m^2 + n^2}{2mn}$ и $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m^2 - n^2}{2mn}$. Тада је $x = 2кmn$, $y = к(m^2 - n^2)$, $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$. Δ

Примери који следе су задаци које је Диофант Александријски решавао у својој "Аритметици", додуше у нешто модификованој форми.

---

[31] Видети Диофант: Аритметика, стр. 217

[32] Видети Борис Павковић – Диофантове једнаџбе, ДММ "Питагора", Бели Манастир, 1988, стр. 14.

ПРИМЕР 117. Одредити све Питагорине троуглове код којих је једна страница једнака 12.

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $x = 2mn = 12$, онда је:

1.1) $m = 6$, $n = 1$ и $x = 12$, $y = 35$, $z = 37$;

1.2) $m = 3$, $n = 2$ и $x = 12$, $y = 5$, $z = 13$;

2) Ако је $y = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 12$, онда је $m + n = 6$, а $m - n = 2$. Тада је $m = 4$ и $n = 2$, па је $x = 16$, $y = 12$ и $z = 20$.

3) Ако је $z = m^2 + n^2 = 12$, онда је јасно да не постоје природни бројеви m и n чији збир квадрата је 12, па су три претходно добијене Питагорине тројке једина решења. Δ

ПРИМЕР 118. Доказати да постоји бесконачно много правоуглих троуглова код којих је хипотенуза за 1 већа од дуже катете.

РЕШЕЊЕ: Како су y и z непарни бројеви, то они не могу бити и узастопни. Према томе $x + 1 = z$ или $2mn + 1 = m^2 + n^2$. Следи да је $m^2 + n^2 - 2mn = 1$, па је $(m - n)^2 = 1$. Дакле, $m = n + 1$, па све основне Питагорине троуглове код којих је хипотенуза за један већа од катете генеришу једнакости: $x = 2n(n + 1)$, $y = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, $z = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

498. Одредити све Питагорине троуглове код којих је једна од страница једнака 2006.

499. Ако је (x, y, z) основна Питагорина тројка, онда је x увек дељиво са 4, y је непаран број већи од 1, а z је облика $4к + 1$. Доказати.

500. Да ли постоји основна Питагорина тројка чији је елемент број 30? Да ли постоји Питагорина тројка чији је елемент број 30?

501. Ако је к природан број већи од 2, онда увек постоји Питагорина тројка чији је елеменат број к. Доказати. Да ли тврђење важи и за основне Питагорине тројке?

502. Доказати да су мерни број обима и површине Питагориних троуглова парних бројева.

503. Одредити све Питагорине троуглове чији мерни број обима је једнак мерном броју површине.

504. Постоји ли Питагорин троугао чија је површина једнака: a) 78; b) 120?

505. Одредити Питагорин троугао чији је обим: a) 88; b) 84.

506. Колико има Питагориних троуглова код којих је мерни број површине 4 пута већи од мерног броја обима?

507. Постоје ли Питагорине тројке (x, y, z) тако да бројеви x, y и z чине: a) аритметичку прогресију; b) геометријску прогресију?

508. Одредити све Питагорине троуглове код којих је: a) разлика; b) збир хипотенузе и сваке од катета потпун куб. (Диофант: Аритметика – књига 6, задатак 1. и задатак 2.)

509. Одредити бар један Питагорин троугао чији је обим потпун куб.

510. Ивице квадра су a = 12 и b = 5. Одредити трећу ивицу квадра c тако да су и ивица c и дијагонала квадра D природни бројеви.

511. Доказати да једначина $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева, тј. доказати да Питагориних четворки има бесконачно много.

512. Доказати да Питагориних петорки има бесконачно много.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

513. Ако су a, b и c цели бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, онда је бар један од бројева a и b дељив са 3. Доказати. (Србија 1971.)

514. Нека су a, b и c природни бројеви такви да је $a^2 + b^2 = c^2$. Доказати да је број abc дељив са 60. (СФРЈ 1977.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

515. Да ли постоји Питагорин троугао чији је обим 2006?

516. Постоји ли Питагорин троугао чији је обим потпун квадрат. Колико таквих троуглова има?

517. Да ли постоји Питагорин троугао чија је површина потпун квадрат?

518. Да ли постоје Питагорине n-торке (n је природан број већи од 5)?

519. Проучити проблеме из шесте књиге Диофантове аритметике.

8.3. ХЕРОНОВИ ТРОУГЛОВИ

Теорија Питагориних бројева омогућује да се каже нека реч и о Хероновим троугловима.

Хероновим троугловима називају се сви они троуглови чији су мерни бројеви страница природни бројеви и чији је мерни број површине такође природан број (даље у тексту се увек мисли на мерне бројеве).

Тако троугао чије су странице 13, 14, 15 има површину 84 и Херонов је, а троугао чије су странице 10, 15 и 20 није Херонов, јер је његова површина ирационалан број.

<u>*ПРИМЕР 119*</u>*. Сви Питагорини троуглови истовремено су и Херонови.*

РЕШЕЊЕ: Површина Питагориног троугла је $P = mn(m^2 - n^2)$ и како су m и n природни бројеви, то је и површина природан број, што значи да су сви Питагорини троуглови истовремено и Херонови.Δ

Обрнуто тврђење на важи. Сви Херонови троуглови нису Питагорини, а контра пример је Херонов троугао чије су странице 13, 14 и 15.

<u>*ПРИМЕР 120.*</u> *Постоји бесконачно много Херонових троуглова.*

РЕШЕЊА: Како су сви Питагорини троуглови Херонови и како Питагориних троуглова има бесконачно много то је јасно да и Херонових троуглова има бесконачно много.Δ

<u>*ПРИМЕР 121.*</u> *Ако се "слепе" два Питагорина троугла који имају једнаку бар једну катету, добија се Херонов троугао.*

РЕШЕЊЕ: Нека су (x, y, z) (x, y\`, z\`) два основна Питагорина троугла са заједничком катетом x. Слепљивањем троуглова дуж заједничке катете x добија се троугао чије су странице y + y\`, z и z\`. Страници y + y\` одговара висина x. Разликују се два случаја:

1) Ако је x = 2к паран број, онда је површина троугла природан број к(y + y\`).

2) Ако је x = 2к +1 непаран, онда су y и y\` парни па је и y + y\` такође паран број, што значи да је површина троугла $\frac{(2k+1)(y+y`)}{2}$ природан број. Δ

Херонов троугао који није правоугли, а чије су све странице различите, назива се прави Херонов троугао.

<u>*ПРИМЕР 122.*</u> *Колико има Херонових троуглова чија је једна висина 20?*

РЕШЕЊЕ: Висина дели троугао на два правоугла троугла. Ако је у правоуглом троуглу једна катета 20, онда је $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 400$, где је z хипотенуза, а y друга катета у том троуглу. Како су x+y и x-y увек исте парности то су могући једино случајеви $(z - y)(z + y) = 2\cdot200 = 4\cdot100 = 8\cdot50 = 10\cdot40$, па таквих Питагориних троуглова има 4: (20, 99, 101), (20, 48, 52), (20, 21, 29) и (20, 15, 25). “Слепљивањем” ових правоуглих троуглова дуж катете једнаке 20 добија се десет Херонових троуглови: (101, 101, 198); (52, 101, 147); (29, 101, 120); (25, 101, 114); (52, 52, 96); (29, 52, 69); (25, 52, 63); (29, 29, 42); (25, 29, 36); (30, 25, 25). Δ

<u>*ПРИМЕР 123.*</u> *Одредити бар један прави Херонов троугао код кога су и полупречник описаног и полупречник уписаног круга природни бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Троугао чије странице су задате формулама 13к, 14к и 15к има обим 2s = 42к и површину P = 84к^2.

Полупречник уписаног круга је $r = \frac{P}{s} = \frac{84k^2}{21k} = 4k$, а полупречник описаног круга је $R = \frac{abc}{4P} = \frac{13k \cdot 14k \cdot 15k}{4 \cdot 84k^2} = \frac{65k}{8}$. За к = 8, добија се Херонов троугао чије су странице 104, 112 и 120, површина 5376, полупречник уписаног круга 32, а полупречник описаног круга 65. Δ

<u>*ПРИМЕР 124.*</u> *Формулама $a = 4m^2 + n^2$; $b = 2m^2 + 2n^2$; $c = 6m^2 - 3n^2$ (m и n су природни бројеви такви да је m > n) дефинисана је једна класа Херонових троуглова. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако се дуж катете 4mn “слепе” два Питагорина троугла чије су странице $(4mn, 2m^2 - 2n^2, 2m^2 + 2n^2)$ и $(4mn, 4m^2 - n^2, 4m^2 + n^2)$, онда су странице добијеног Хероновог троугла $(4m^2 + n^2, 2m^2 + 2n^2, 4m^2 - n^2 + 2m^2 - 2n^2 = 6m^2 - 3n^2)$. Δ

Добијена формула генерише бесконачно много Херонових троуглова. Међутим, она није једина која “производи” Херонове троуглове, јер се сличним слепљивањима могу добити и друге формуле које генеришу Херонове троуглове.

Очигледно је да постоје и Херонови четвороуглови, а то су они четвороуглови који имају све странице целобројне и чија је површина цео број. Такав је четвороугао чије су странице 7, 24, 20, 15 који је добијен "слепљивљњем" Питагориних троуглова (7, 24, 25) и (20, 15, 25) дуж хипотенузе 25.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

519. Не постоји једнакостраничан нити једнакокраки Херонов троугао. Доказати.

520. Конструиши бар један Херонов троугао чија је: а) једна од висина једнака 10; b) једна од страница једнака 10.

521. Одредити странице бар једног правог Хероновог троугла чије висине нису цели бројеви.

522. Одредити све Херонове четвороуглове чија је једна страница 12.

523. Доказати да постоји бесконачно много Херонових четвороуглова.

524. Постоји ли Херонов петоугао?

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

525. Доказати да постоји бесконачно много неподударних троуглова T таквих да:

- дужине страница a, b и c троугла T су узајамно прости природни бројеви;
- површина P троугла T је цео број;
- ниједна од висина троугла T није цео број. (8. БМО - 1991.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

526. Троуглови чије су странице (3, 4, 5); (13, 14, 15); (51, 52, 53) су Херонови. Да ли је број Херонових троуглова чије су странице узастопни природни бројеви коначан или бесконачан?

527. Конструиши бар једну формулу која генерише бесконачно много Херонових четвороуглова.

528. Постоји ли Херонов тетраедар, тј. тетраедар чије су ивице природни бројеви, а површина и запремина тетраедра такође природни бројеви?

9. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - py^2 = 1$

Међу Диофантовим једначинама за које постоји алгоритам за њихово решавање својом занимљивошћу се истиче једначина облика $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није квадрат ниједног целог броја. Једначина облика $x^2 - py^2 = 1$ у математичкој литератури се најчешће среће под називом Пелова једначина,[33] али није много мање распрострањен ни термин Фермаова једначина.[34] Међутим, познато је да су се том једначином интензивно бавили и Архимед, Диофант, Баскара, Лагранж, Валис, Ојлер, Гаус, ...

У осврту на еволуцију идеја које су кроз историју пратиле Диофантове једначине већ је било говора о Пеловој једначини и спору који постоји око њеног назива. Било је говора и о двема најважнијим чињеницама за њено решавање: о томе да Пелова једначина има бесконачно много решења, што је доказао Лагранж[35], и о начину одређивања такозваног основног решења, које је захваљујући моћима савремене рачунарске технологије све мањи проблем.

Пелова једначина има облик $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није потпун квадрат. Услов да p није потпун квадрат је неопхо-дан, јер у супротном једначина, сем тривијалног $(x_o, y_o) = (1, 0)$ нема других решења.

У расветљавању алгоритма за решавање Пелове једначине могуће је више приступа, али су најуобичајнија два: геометријски и алгебарски. Могућ је и трећи, историјски приступ, који се заснива на примени Диофантовог метода (алгоритма).

9.1. АЛГЕБАРСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Из $x^2 - py^2 = 1$, следи релација $(x - y\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = 1$. Ова релација је врло употребљива за степеновање и остале алгебарске трансформације.

Претпоставимо да поред тривијалног постоји и једно нетривијално решење, на пример (x_1, y_1). Ако је (x_1, y_1) једно нетривијално решење дате једначине, онда је $(x_1 - y_1\sqrt{p})(x_1 + y_1\sqrt{p}) = 1$.

[33] John Pell (1610 – 1685. г.), енглески математичар

[34] Ferma (Piere Fermat 1601-1665. г.), француски математичар

[35] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813. г.), француски математичар

Нека је (x_n, y_n) уређени пар природних бројева који задовољава релацију $x^2 - py^2 = 1$. Степеновањем дате једнакости са n добијају се нове релације $(x_1 - y_1\sqrt{p})^n(x_1 + y_1\sqrt{p})^n = (x_n - y_n\sqrt{p})(x_n + y_n\sqrt{p}) = 1$. Најмање од таквих решења (прецизније оно решење код којег је $x_1 + y_1\sqrt{p}$ најмање) назива се основним решењем. Оно што није сасвим тривијално је да се докаже да ако је (x_e, y_e) основно решење, тада су претходним поступком описана сва решења Пелове једначине.[36]

"Када је основно решење познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из релације $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_e + y_e\sqrt{p})$ следи нова релација: $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = x_n x_e + p y_n y_e + \sqrt{p}(y_n x_e + y_e x_n)$.

Изједначавањем рационалних и ирационалних делова једнакости добијају се рекуретне везе:

$$x_{n+1} = x_e\, x_n + p\, y_e\, y_n$$

$$y_{n+1} = y_e\, x_n + x_e\, y_n.$$

Низови (x_n) и (y_n) задовољавају претходно добијен систем диференцних једначина, уз почетне услове: (x_o, y_o) = (1, 0). Из добијеног система диференцних једначина низови (x_n) и (y_n) се одређују рекурентно.

Могуће је извести и формуле за директно одређивање низова (x_n) и (y_n), при чему тражене формуле наводимо без одговарајућег доказа:[37]

$$x_n = \frac{1}{2}\left((x_e + y_e\sqrt{p})^n + (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left((x_e + y_e\sqrt{p})^n - (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right).$$

<u>ПРИМЕР 125.</u> *Одредити опште решење једначине $x^2 - 3y^2 = 1$.*

---

[36] Доказ ове чињенице видети у: Мићић, Владимир, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева – ДМС, Београд, 2004.

[37] Доказ је елементаран и може се извести директно из релације $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_e + y_e\sqrt{p})^n$ или решавањем добијеног система диференцних једначина

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $(x_0, y_0) = (1, 0)$, а основно решење $(x_e, y_e) = (7, 4)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулама:

$$x_{n+1} = 7x_n + 12y_n, \quad y_{n+1} = 4x_n + 7y_n.$$

а нека од решења једначине дата су таблицом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	1	7	97	1351	262087	3650401	50843527	708158977
y_n	0	4	56	780	151316	2107560	29354524	408855776

9.2. ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Пелова једначина $x^2 - py^2 = 1$ $(p \neq n^2)$ у Декартовој координатној равни дефинише хиперболу. Посматрајмо само њену позитивну полуграну. Очигледно је да уређени пар (1, 0) представља тривијално решење дате једначине, а тачка (1, 0) представља тачку хиперболе чије су обе координате целобројне. Нека је $(1, 0) = (x_0, y_0)$ и нека је (x_1, y_1); (x_2, y_2); ... (x_n, y_n) ... низ тачака које припадају датој хиперболи, а чије су обе координате целобројне.

Ако поред тачке (x_0, y_0), тј. тривијалног решења знамо још једно нетривијално решење, например (x_1, y_1), онда је могуће одредити трансформацију која ће генеристи и остала решења дате једначине. Та трансформација се може исказати следећим рекурентним формулама:

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

Бројеви a, b, c и d су целобројни коефицијенти које треба одредити тако да добијена трансформација дату хиперболу пресликава у саму себе.

Како је $x_1 = ax_0 + by_0$ и $y_1 = cx_0 + dy_0$, и како је $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$, то је очигледно $a = x_1$ и $c = y_1$. Дакле трансформација сада има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + by_n$$
$$y_{n+1} = y_1x_n + dy_n.$$

Због $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = 1$, следи да је $(x_1x_n + by_n)^2 - p(y_1x_n + dy_n)^2 = 1$. Одавде се квадрирањем добија $x_n^2(x_1^2 - py_1^2) + 2x_ny_n(bx_1 - pdy_1) - y_n^2(kd^2 - b^2) = 1$. Како се траженом трансформацијом дата хипербола пресликава у саму себе, то је и $x_n^2 - py_n^2 = 1$, па због $x_1^2 - py_1^2 = 1$ закључујемо да је $bx_1 - pdy_1 = 0$ и $kd^2 - b^2 = p$. Решавањем добијеног система једначина по траженим коефицијентима b и d добијају се њихове вредности: $b = py_1$ и $d = x_1$.

Коначно тражена трансформација има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + py_1y_n$$

$$y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n.$$

Очигледно је $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = (x_1x_n + py_1y_n)^2 - k(y_1x_n + x_1y_n)^2 = x_n^2(x_1^2 - py_1^2) + 2x_n y_n(kx_1y_1 - py_1x_1) - py_n^2(x_1^2 - py_1^2) = x_n^2 - py_n^2 = 1$, што је доказ да добијене рекурентне формуле задовољавају дату једначину.

Очигледно је и дата трансформација линеарна и њена детерминанта је

$$\begin{vmatrix} x_1 & ky_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 - py_1^2 = 1.$$

То значи да је добијена трансформација унимодуларна, што обезбеђује да је добијено пресликавање бијективно, а то опет значи, да ако постоји бар једно нетривијално целобројно решење Пелове једначине $x^2 - py^2 = 1$, онда се добијеном рекурентном формулом може произвести бесконачно много целобројних решења.

Међутим, одређивање основног решења је и само озбиљан проблем. У неким случајевима то може бити једноставно:

1) Ако је $p = a^2 - 1$, онда је $x^2 - py^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Следи да је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$, па је основно решење $(x_e, y_e) = (a, 1)$.

2) Ако је $p = a^2 + 1$, онда је $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$. Тада је $x^2 = a^2y^2 + y^2 + 1$. Да би $a^2y^2 + y^2 + 1$ био потпун квадрат треба да је $y^2 = 2ay$, па је $y = 2a$, а $x = ay + 1 = 2a^2 + 1$. Значи да је $(x_e, y_e) = (2a^2 + 1, 2a)$.

3) Ако једначина $x^2 - ay^2 = 1$, има решење (може бити, а не мора бити основно) $(x_к, y_к)$, онда једначина $x^2 - 4ay^2 = 1$, има решење $(x_к, y_к/2)$, јер из $x_к^2 - ay_к^2 = 1 = x^2 - 4ay^2$, следи $x = x_к$ и $4y^2 = y_к^2$. На пример основно решење за Пелову једначину $x^2 - 5y^2 = 1$ је $(9, 4)$, а на основу тога се добија основно решење за $x^2 - 20y^2 = 1$ и оно је $(9, 2)$.

3.1) Слична релација се може добити и ако се посматрају Пелове једначине $x^2 - ay^2 = 1$ и $x^2 - 9ay^2 = 1$, јер ће свако решење $(x_к, y_к)$ прве једначине генерисати основно решење $(x_к, \frac{y_К}{3})$ друге једначине. Пример: ако је $p = 7$, онда је $x_e = 8$, $y_e = 7$. Следи за $p = 7 \cdot 9 = 63$, $x_e = 8$, $y_e = 1$.

На основу ове три олакшице и нумеричких истраживања Пелове једначине могуће је формирати таблицу основних решења за првих четрдесетак природних вредности коефицијената p у Пеловој једначини $x^2 - py^2 = 1$:

p	x_e	y_e	p	x_e	y_e	p	x_e	y_e
2	3	2	17	33	8	30	11	2
3	2	1	18	17	4	31	1520	273
5	9	4	19	170	39	32	17	3
6	5	2	20	9	2	33	23	4
7	8	3	21	21	55	34	35	6
8	3	1	22	197	42	35	6	1
10	19	6	23	24	5	37	73	12
11	10	3	24	5	1	38	37	6
12	7	2	26	51	10	39	25	4
13	649	180	27	26	5	40	19	3
14	15	4	28	127	24	41	2049	320
15	4	1	29	9801	1820	42	13	2

9.3. ЈЕДНАЧИНЕ ПЕЛОВОГ ТИПА

Под једначинама Пеловог типа подразумевају се једначине облика $x^2 - py^2 = a$, где је p природан број који није потпун квадрат и a цео број различит од 0.

Дакле, поставља се питање да ли постоји алгоритам за решавања једначине $x^2 - py^2 = a$?

Нека је је (x_o, y_o) једно решење, а (x_n, y_n) опште решење једначине $x^2 - py^2 = a$ у скупу природних бројева и нека је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 - py^2 =1$. Тада важе релације:

$$x^2 - py^2 = (x + y\sqrt{p})(x - y\sqrt{p}) = a$$

$$x_n^2 - py_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) = a$$

$$x_e^2 - py_e^2 = = (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = 1.$$

Из датих релација је

$$(x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) =$$

$$(x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = a.$$

Тада је очигледно $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_o + y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n$, што даје могућност за одређивање свих решења (x_n, y_n) једначине $x^2 - py^2 = a$, ако су позната основна решења (x_e, y_e) једначине $x^2 - py^2 = 1$ и (x_o, y_o) једначине $x^2 - py^2 = a$.

<u>ПРИМЕР 126.</u> *Одредити опште решење једначине $x^2 - 2y^2 = -1$.*

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (7, 5)$, а основно решење Пелове једначине $x^2 - 2y^2 = 1$ је $(x_e, y_e) = (3, 2)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулом:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})n = (7 + 5\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n. \Delta$$

Алгоритам за одређивање тривијалних решења једначина Пеловог типа даје и следећи пример који наводимо без доказа: [38]

<u>ПРИМЕР 127.</u> *Ако једначина $x^2 - py^2 = a$ има бар једно решење, онда постоје цео број n и решење (x_o, y_o) дате једначине, за које важи:*

$$y_o^2 \le \frac{ay_e^2}{2(x_e + 1)} \text{ ако је } a > 0 \text{ и } y_o^2 \le \frac{-ay_e^2}{2(x_e + 1)} \text{ ако је } a < 0, \text{ такви да је}$$

$$x_n + y_n\sqrt{p} = \pm(x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})^n.$$

<u>ПРИМЕР 128.</u> *Одредити сва решења једначине $x^2 - 5y^2 = 44$ у скупу целих бројева.*

[38] Доказ ове чињенице може се видети у књизи Мићић Владимир, Каделбур Зоран, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије, Београд, 2004,стр. 92 – 93.

РЕШЕЊЕ: Одговарајућа Пелове једначине је $x^2 - 5y^2 = 1$ и њено основно решење је $(x_e, y_e) = (9, 4)$. Применом претходне теореме добија се $y_o{}^2 \le \dfrac{44 \cdot 4^2}{2(9+1)} = 35{,}2$. То значи да је потенцијално $y_o \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Провером се добија да условима задатка одговарају решења дате једначине $(x_0, y_0) \in \{ (\pm 7, \pm 1);\ (\pm 8, \pm 2);\ (\pm 13, \pm 5) \}$.

Тада су сва решења дате једначине у скупу целих бројева дефинисана формулама:

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \begin{cases} \pm(7 \pm \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(8 \pm 2\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(13 \pm 5\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \end{cases} \qquad \text{где је n цео број. } \Delta$$

9.4. ПРИМЕНА ЈЕДНАЧИНА ПЕЛОВОГ ТИПА

Примери примене једначина Пеловог типа су многобројни, не само на решавање конкретних једначина Пеловог типа и једначина које се на њих своде, већ и на мноштво веома интересантних Диофантових проблема.

ПРИМЕР 129. *За дати природни број n одредити један пар (x, y)природних бројева за које важи* $x^2 - 2y^2 = 1993^n$. [39]

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1993^n$ и како важи релација $(45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n = 1993^n$ јасно је да за бројеве x и y важи једнакост $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = (45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n$. Дакле $x + y\sqrt{2} = (45 + 4\sqrt{2})^n$, па је

$$x = 45^n + \binom{n}{2} 45^{n-2}(4\sqrt{2})^2 + \binom{n}{4} 45^{n-4}(4\sqrt{2})^4 + \ldots$$

$$y = \binom{n}{1} 45^{n-1} \cdot 4 + \binom{n}{3} 45^{n-3} \cdot 4^3 \cdot 2 + \binom{n}{5} 45^{n-5} \cdot 4^5 \cdot 2^2 + \ldots$$

[39] Видети задатке са Мале олимпијаде у СФРЈ 1993. г.

Очигледно је да се за сваки природан број n добија један пар природних бројева (x, y).

<u>*ПРИМЕР 130.*</u> *Одредити три узастопна природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени природни бројеви $y - 1$, y и $y + 1$. Из услова задатка следи да је $(y – 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 = x^2$. Следи да је $x^2 = 3y^2 + 2$. Како не постоји природан број x чији квадрат при дељењу са 3 даје остатак 2, то једначина нема решења. Δ

Овај пример показује да постоје Диофантове једначине Пеловог типа, као што је претходна $x^2 – 3y^2 = 2$, које немају решења. Следећи задатак указује на једну класу једначина Пеловог типа које имају решења.

<u>*ПРИМЕР 131.*</u> *Ако је p прост број облика 4к + 1, онда једначина $x^2 – py^2 = - 1$ увек има целобројна решења.*

РЕШЕЊЕ: Нека је (x_e, y_e) основно, дакле најмање нетривијално решење једна-чине $x^2 – py^2 = 1$. Тада је $x_e^2 = py_e^2 + 1$. Ако је x_e паран број, онда је број $(4к+1)y_e^2 \equiv - 1 \pmod 4$ што је немогуће, па је очигледно x_e непаран број. Тада су $x_e – 1$ и $x_e + 1$, два узастопна парна броја, па је $D(x_e – 1, x_e + 1) = 2$. Како је $(x_e – 1)(x_e + 1) = py_e^2$, то је један од бројева $x_e – 1$ и $x_e + 1$ облика $2a^2$, а други облика $2pb^2$ (a и b су цели бројеви).

Претпоставимо да је $x_e + 1 = 2a^2$ и $x_e – 1 = 2pb^2$. Тада је $2a^2 - 2pb^2 = 2$, па је $a^2 – pb^2 = 1$. Значи да је (a, b) једно нетривијално решење Пелове једначине $x^2 – py^2 = 1$. Из $(x_e + 1)(x_e – 1) = 2a^2 \cdot 2pb^2 = py_e^2$, следује да је $y_e = 2ab$.

Очигледно је $a < x_e$ и $b < y_e$, што је противуречност са претпоставком да је (x_e, y_e) најмање решење Пелове једначине. Значи да је $x_e - 1 = 2a^2$ и $x_e + 1 = 2pb^2$. Одузимањем друге од прве једнакости добија се $2a^2 – 2pb^2 = -2$, односно $a^2 - pb^2 = - 1$, па једначина $x^2 – py^2 = - 1$ има решење (a, b), што је и требало доказати. Δ

<u>*ПРИМЕР 132.*</u> *Одредити све правоугле троуглове код којих су мерни бројеви катета разликују за 1. Да ли таквих троуглова има коначно или бесконачно много?*

РЕШЕЊЕ: Из Питагорине једначине је познато да је постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$ и $y = m^2 – n^2$. Очигледно је да постоје две могућности: $2mn = m^2 – n^2 - 1$ или $2mn = m^2 – n^2 + 1$.

1) Ако је $m^2 - n^2 - 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = 1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = 1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = 1$.

2) Ако је $m^2 - n^2 + 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = -1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = -1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = -1$.

Очигледно је да таквих троуглова има бесконачно много, а преглед првих неколико решења једне и друге једначине дајемо у следећој табели:

$a^2 - 2b^2 = 1$						
a	B	m	n	x	y	z
3	2	5	2	20	21	29
17	12	29	12	696	697	985
99	70	169	70	23660	23661	33461
577	408	985	408	803760	803761	1136689
3363	2378	5741	2378	27304196	27304197	38613965
$a^2 - 2b^2 = -1$						
1	1	2	1	4	3	5
7	5	12	5	120	119	169
41	29	70	29	4060	4059	5741
239	169	408	169	137904	137903	195025
1393	985	2378	985	4684660	4684659	6625109

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

529. Ако су x и y природни бројеви одредити опште решење једначине $x^2 - 14y^2 = 1$.

530. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $4x^2 - 7y^2 = 1$.

531. У скупу целих бројева решити једначину $3x^2 - 2y^2 = 1$.

532. Одредити целе бројеве x и y тако да је $x^2 + y^2 + 1 = 4xy$.

533. Доказати да за сваки природан број m постоји бесконачно много парова (x,y) целих бројева таквих да је $x^2 - (m^2 + 1)y^2 = 1$.

534. Доказати да постоји бесконачно много бројевних система у којима је број (210) потпун квадрат. Одредити два бројевна система која имају најмању основу.

535. Ако и само ако је x члан Фибоначијевог низа, онда је један од бројева $5x^2 + 4$ или $5x^2 - 4$ потпун квадрат. Доказати.

536. Ако су m и n природни бројеви и $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$, онда је m потпун квадрат. Доказати.

537. Троугаони бројеви су бројеви 1, 3, 6, 10, 15, 21 ... дакле они бројеви који представљају збир првих n узастопних природних бројева. Одредити све потпуне квадрате који су истовремено и троугаони бројеви. Да ли таквих троугаоних бројева има коначно или бесконачно много?

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

538. Испитати да ли правих Хepонових троуглова код којих су странице узастопни природни бројеви има коначно или бесконачно много?

539. Постоје ли природни бројеви n и к такав да је збир квадрата првих n природних бројева потпун квадрат: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = к^2$? Да ли таквих бројева има коначно или бесконачно много?

540. Очигледно је $8^3 - 7^3 = 169 = (2^2 + 3^2)^2$. Доказатаи да ако су x, y и z природни бројеви, онда једначина $(x + 1)^3 - x^3 = (y^2 + z^2)^2$ има бесконачно много решења.

10. ОСТАЛЕ КВАДРАТНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

10.1. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = pz^2$

Једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ има тривијално решење x = y = z = к. Али се поставља питање и других решења.

<u>*ПРИМЕР 133.*</u> *Одредити опште решење једначине* $x^2 + y^2 = 2z^2$.

РЕШЕЊЕ: У задатку 490. доказано је да једначина $x^2 + y^2 = n$ има једнак број решења[40] као једначина $x^2 + y^2 = 2n$, па је чак успостављена и једнозначна кореcподенција између решења ових деју једначина: $(x, y) \to (x - y, x + y)$.

То значи да ако Питагорина једначина $x^2 + y^2 = z^2$ има опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = |m^2 - n^2 + 2mn|$, $y = |m^2 - n^2 - 2mn|$ и $z = m^2 + n^2$. Треба нагласити да су услови за параметре m и n једнаки условима код Питагорине једначине.

Раније је доказано да Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ сем тривијалног решења (0, 0, 0) нема других решења. [41]

Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 4z^2$ се може посматрати и у облику $x^2 + y^2 = (2z)^2$, па је јасно да је тада (x, y, 2z) Питагорина тројка. То значи да је њено опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $2z = m^2 + n^2$, уз додатне услове за природне бројеве m и n: (1) $m > n$; (2) m и n су исте парности (јер ће само тако z бити природан број).[42]

Међутим, решења једначине $x^2 + y^2 = 4z^2$ се могу посматрати и као кореcподентна са решењима једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$. Тада ће се добити опште решење: $x = 4mn$, $y = 2(m^2 - n^2)$ и $z = m^2 + n^2$.

Овај начин решавања проблема је интересантан због тога што је очигледно да једначина $x^2 + y^2 = pz^2$ има нетривијалниа решења и лако се долази до решење за све бројеве $p = 2^к$.

---

[40] То значи и да ако једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења, онда их нема ни једначина $x^2 + y^2 = 2n$.

[41] Видети раније разматрано потпоглавље 4.10. о решавању Диофантових једначина методом "најмањег" решења

[42] Као што је за Питагорине бројеве направљена таблица решења, тако се може учинити и за све друге једначине чија решења зависе од више параметара.

Слично се може посматрати и једначина $x^2 + y^2 = 5z^2$. Она има тривијално решење (к, 2к, к). Ако се примени Диофантов метод, после увођења смене једначина се своди на $a^2 + b^2 = 5$, а потом се трансформацијом $a = 2 + mt$, $b = 1 + nt$, и враћањем смене добија опште решење једначине: $x = 2n^2 - 2m^2 – 2mn$, $y = m^2 – n^2 - 4mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Једначина $x^2 + y^2 = 6z^2$ сем тривијалног (0, 0, 0) нема других целобројних решења. Ово следи из већ поменуте чињенице да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења (број решења је 0), јер тада и једначина $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3z^2$ има исти број решења.

Ако је $x^2 + y^2 = 7z^2$, онда се методом "најмањег" решења може доказати да дата једначина, сем тривијалног нема других решења.

Једначина $x^2 + y^2 = 8z^2$, спада у класу једначина $x^2 + y^2 = 2^к z^2$ и има нетривијално решење.

Јасно је да једначина $x^2 + y^2 = 9z^2$ има тривијално решење (3к, 0, к). Како је $x^2 + y^2 = (3z)^2$, онда је опште решење једначине дефинисано релацијама: $x = 6mn$, $y = 3(m^2 – n^2)$ и $z = m^2 + n^2$.

За једначину $x^2 + y^2 = 10z^2 = 5{\cdot}2z^2$ се опште решење може извести из решења једначине $x^2 + y^2 = 5z^2$ и процес истраживања се може наставити појединачним разматрањима.

10.2. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + py^2 = z^2$

Једначина $x^2 + 2y^2 = z^2$ се трансформацијом $2y^2 = z^2 – x^2 = (z + x)(z – x)$ своди на систем једначина $z + x = 2y$, $z – x = y$. Како у мора бити паран број, значи $y = 2к$, добија се да је $z = \dfrac{3y}{2} = 3к$ и

$x = \dfrac{y}{2} = к$. Дакле, једно решење је $x = к$, $y = 2к$, $z = 3к$.

Овим једноставним трансформацијама су дата само нека, али не и сва решења. Диофантовим методом добија се једно од могућих класа решења решења: $x = 2n^2 – m^2 – 8mn$, $y = 2m^2 – 4n^2 – 2mn$ и $z = 3(m^2 + 2n^2)$. Међутим, могуће је и далеко општије разматрање.

<u>*ПРИМЕР 134.*</u> *Одредити опште решење једначине* $x^2 + 2y^2 = z^2$.

РЕШЕЊЕ: Из $x^2 + 2y^2 = z^2$ следи да су x и z исте парности. Како је $2y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$, то су $z + x$ и $z - x$ парни бројеви. Нека је $z + x = 2a$ и $z - x = 2b$, па је $2y^2 = 4ab$ и $y^2 = 2ab$. Дакле, y мора бити паран број, а 2ab је потпун квадрат. Нека је $a = 2m^2$ и $b = n^2$ $(m, n \in N)$. Тада је $x = 2m^2 - n^2$, $y = 2mn$ и $z = 2m^2 - n^2$ $(m, n \in N)$. Ако је $a = m^2$ и $b = 2n^2$ $(m, n \in N)$. Тада је $x = m^2 - 2n^2$, $y = 2mn$ и $z = m^2 - 2n^2$ $(m, n \in N)$.Δ

Ако се посматра једначина $x^2 + 3y^2 = z^2$, онда је тривијално решење једначине x = y = z = к. Диофантов метод доста лако даје једну класу решења: $x = 3n^2 - m^2 - 6mn$, $y = m^2 - 3n^2 - 2mn$ и $z = 2(m^2 + 3n^2)$. Општије решење се може добити поступком сличним поступку у примеру 134, који може бити универзалан и примењив не само за $p = 3$, већ за сваки природан број p.

Очигледно је да за свако p које је природан број дата једначина $x^2 + py^2 = z^2$ има бесконачно много решења која се добијају трансформа-ацијом $py^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$ и решавањем једног од могућих систем једначина (на пример) $z + x = py$, $z - x = y$. Ако се стави да је y = 2к, добија се фамилија решења: x = (p – 1)к, y = 2к, z = (p + 1)к.

"Боља" решења се могу добити Диофантовом и другим методама.[43] [44]

10.3. ЈЕДНАЧИНА $px^2 + qy^2 = rz^2$

Једначина $px^2 + qy^2 = rz^2$ где су p, q и r дати природни бројеви се може разматрати слично претходним случајевима.[45] Размотримо неколико конкретних примера:

<u>ПРИМЕР 135.</u> Одредити опште решење једначине $2x^2 + 7y^2 = z^2$ у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Једно партикуларно решење ће помоћи да се Диофант-овим методом одреди бар једна формула која генерише бесконачно много решења. Како је једно такво решење $x_o = 3$, $y_o = 1$, $z_o = 5$, једначина има бесконачно много решења која генеришу формуле: x = 3к, y = к, z = 5к.

[43] Једно решење једначине $x^2 + py^2 = z^2$, за ситуацију када је p прост број видети у књизи Jože Graselli: Diofantske enačbe – Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

[44] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

[45] Опште решење квадратне Диофантове једначине видети у књизи Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије Београд, 2004, стр. 50-51.

Класа решења се добија Диофантовим методом и после обављених трансформација следи двопраметарско решење дате Диофантове једначине: $x = 21n^2 - 54m^2 - 70mn$, $y = 2m^2 - 63n^2 - 60mn$; $z = 5\,(2m^2 + 7n^2)$.Δ

<u>*ПРИМЕР 136.*</u> *Одредити сва решења једначине $3x^2 + 5y^2 = 30z^2$ у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Како су $5y^2$ и $30z^2$ дељиви са 5 то мора и $3x^2$ бити дељиво са 5, што значи да је $x = 5a$. Тада се добија једначина $75a^2 + 5y^2 = 30z^2$. Дељењем са 5 следи да је $15a^2 + y^2 = 6z^2$. Како су $15a^2$ и $6z^2$ дељиви са 3, то мора бити и y^2, па је $y = 3b$. Тада је $15a^2 + 9b^2 = 6z^2$ и дељењем са 3 добија се једначина $5a^2 + 3\,b^2 = 2z^2$. Једно од могућих решења добијене једачине је $a_o = 1$, $b_o = 1$ и $z_o = 2$.

Добијена једначина је еквивалентна са једначином:

$5\left(\frac{a}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{z}\right)^2 = 2$. Ако се уведе смена $\alpha = \frac{a}{z}$ и $\beta = \frac{b}{z}$, онда је $5\alpha^2 + 3\beta^2 = 2$. Једно решење добијене једначине је $\alpha o = \beta o = \frac{1}{2}$. Ако је $\alpha = \frac{1}{2} + mt$ $\beta = \frac{1}{2} + nt$, добија се да је $t = -\frac{5m + 3n}{5m^2 + 3n^2}$. После примене свих коришћених смена добија се двопараметарска класа решења дате једначине: $x = 5\,(3n^2 - 5m^2 - 6mn)$; $y = 3(5m^2 - 3n^2 - 10mn)$ и $z = 2(5m^2 + 3n^2)$. Δ

<u>*ПРИМЕР 137.*</u> *Доказати да једначина $4x^2 + 16y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако се уведу смене $2x = a$ и $4y = b$, једначина постаје $a^2 + b^2 = 3z^2$. Раније је доказано да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева, чиме је доказано да и дата једначина нема решења. Δ

10.4. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ се може посматрати као проширење Питагорине једначине. Постављају се класична питања: да ли једначина има и колико решења? Може ли се одредити опште решење?

<u>ПРИМЕР 138.</u> Доказати да Питагориних четворки, тј. бројева који задовољавају једначину $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, где су x, y, z и t природни бројеви, има бесконачно много.

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, то је (3, 4, 12, 13) једна Питагорина четворка. Међутим, тада је и (3к, 4к, 12к, 13к) такође Питагорина четворка, што доказује да Питагориних четворки има бесконачно много, мада добијено решење не описује и све Питагорине четворке. Δ

<u>ПРИМЕР 139.</u> Одредити бар једну од фамилија формула x = x(к), y = y(к), z = z(к) и t = t(к) таквих да је $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

РЕШЕЊЕ: Решење $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$, као и решење поменуто у претходном примеру $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ указују на формулу x = к, y = к+1, z = к(к+1) и $t = к^2 + к + 1$. Заиста је $x^2 + y^2 + z^2 = к^2 + (к+1)^2 + (к(к+1))^2 = к^2 + к^2 + 2к + 1 + к^4 + 2к^3 + к^2 = к^4 + к^3 + к^2 + к^3 + к^2 + к + к^2 + к + 1 = к^2(к^2 + к + 1) + к(к^2 + к + 1) + (к^2 + к + 1) = (к^2 + к + 1)^2 = t^2$. Δ

Ако би се у истраживању једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ кренуло и мало даље могло би се закључити следеће:

<u>ПРИМЕР 140.</u> Опште решење једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ у скупу природних бројева дефинисано је следећим релацијама: x = 2p, y = 2q, $z = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$ и $t = \dfrac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$ где су p, q и r природни бројеви који испуњавају следеће услове: (1) $p^2 + q^2$ је дељиво са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$.

РЕШЕЊЕ: Како број t^2 при дељењу са 4 даје остатак 0 или 1, то и лева страна једнакости мора имати исти остатак при дељењу са 4. Јасно је да ако је t паран онда и x, y и z морају бити парни, па се дељењем једначине са 4 (једном, два, или више пута), опет на крају долази до случаја када је t непаран. Тада је очигледно да су два од три броја x, y и z парни, а један непаран.

Нека је x = 2p и y = 2q[46]. Нека је z непаран. Како је t > z и како су оба непарна то је њихова разлика паран број, тј. t – z = 2r или t = 2r + z. Како је $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, то је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4q^2 = t^2 - z^2 = (t - z)(t + z) = 2r(2r + z + z) = 4r^2 + 4rz$.

[46] Видети текст у књизи Jože Graselli: Diofantske enačbe – Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

Из једнакости $4p^2 + 4q^2 = 4r^2 + 4rz$ следи да је $p^2 + q^2 - r^2 = rz$. Тада је $z = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$ уз услове: (1) збир $p^2 + q^2$ је дељив са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$. Δ

Нека решења дате једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ приказана су, слично Питагориним бројевима у следећој табели која је сортирана по растућим вредностима броја t:

p	q	p^2+q^2	r	x	y	z	t
1	1	2	2	2	2	1	3
2	1	5	1	4	2	4	6
3	1	10	2	6	2	3	7
4	2	20	4	8	4	1	9
3	1	10	1	6	2	9	11
6	2	40	8	12	4	3	13
5	1	26	2	10	2	11	15
7	1	50	5	14	2	5	15
6	4	52	4	12	8	9	17

<u>ПРИМЕР 141.</u> Одредити све бројеве x, y, z, тако да важи једнакост $x^2 + y^2 + z^2 = 15^2$.

РЕШЕЊЕ: На основу теореме 16. следи да је $t = \dfrac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$, односно $p^2 + q^2 + r^2 = 15r$. Провером за разне вредности r $(0 < r < t = 15)$ добија се да је $p^2 + q^2 \in \{14, 26, 36, 44, 50, 54, 56\}$. Како је $26 = 1^2 + 5^2$, $36 = 0^2 + 6^2$; $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, то су сва решења: $2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$; $0^2 + 12^2 + 9^2 = 15^2$; $2^2 + 14^2 + 5^2 = 15^2$; $10^2 + 10^2 + 5^2 = 15^2$. Δ

10.5. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ је већ разматрана за n једнако 2 и 3. Наредни примери показују да једначина има бесконачно много решења, а могу се извести и много детаљнија разматрања проблема.[47 48]

[47] Детаљније о овој једначини видети у књизи Jože Graselli – Diofantske enačbe, Knjižica Sigma, Ljubljana, 1984, стр. 64 - 67.

[48] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

ПРИМЕР 142. *Доказати да једначина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2$ има бесконачно много решења.*

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, то је фамилија решења дате једначине дефинисана уређеном петорком (3к, 4к, 12к, 84к, 85к), где је к било који природан број. Очигледно је да таквих решења има бесконачно много, чиме је доказ завршен.Δ

Сличан доказ се може извести и за општи случај.

ПРИМЕР 143. *Доказати да једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења.*

РЕШЕЊЕ: Доказ се изводи математичком индукцијом по n ($n \geq$. 2).

1) За n = 2 тврђење важи (теорема о Питагориним тројкама).

2) Претпоставимо да једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења.

3.1.) Ако је x_{n+1} паран број, онда је $x_{n+1} = 2к$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к$, $y_{n+1} = к^2 - 1$, $y_{n+2} = к^2 +1$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$. Како је по индукцијској претпоставци једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења то и једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ има бесконачно много решења.

3.2) Ако је x_{n+1} ненепаран број, онда је $x_{n+1} = 2к + 1$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к + 1$, $y_{n+1} = 2к(к + 1)$, $y_{n+2} = к^2 + (к +1)^2$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ и даљи ток доказа је идентичан доказу под 3.1). Δ

Идеја садржана у овом претходном доказу може бити квалитетно искоришћена за формирање Питагориних n-торки ($3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$...) и решавање квадратних Диофантових једначина облика $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$. Идеја је доста једноставна, јер се при преласку са Питагорине n-торке, на n+1-торку уствари тражи Питагорина тројка која као катету садржи x_n. Конкретан алгоритам који разматра начин решавања ове Диофантове једначине је присутан у литератури[49] и може се веома успешно пренети и на рачунаре, чиме се олакшава израчунавање решења. [50]

---

[49] Видети књигу Jože Graselli – Diofantske enačbe, Ljubljana, 1984. стр. 66 - 70.

[50] Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

10.6. НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ СИСТЕМИ КВАДРАТНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Једна од најједноставнијих примена третираних квадратних Диофантових једначина је могућа код система једначина. Неки системи Диофантових једначина већ су коришћени у претходним поглављима. О још неким системима квадратних Диофантових једначина ће бити речи у наредним примерима, при чему се мора нагласити да у овој проблематици нема потребе за неким великих теоријским уводима.

<u>ПРИМЕР 144.</u> *Одредити све целе бројеве x и y тако да је* $x^3 - y^3 = 91$.[51]

РЕШЕЊЕ: Иако ово није у суштини систем, већ једна једначина, она се у ствари своди на систем Диофантових једначина, од којих је једна квадратна. Како је $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ и како је $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + (x+y)^2\right) \geq 0$ то значи да су оба фактора, дакле $x - y$ и $x^2 + xy + y^2$ позитивна, јер њихов производ мора бити $91 = 7 \cdot 13$. Због тога се разликују четири случаја:

1) $x - y = 1$ и $x^2 + xy + y^2 = 91$; 2) $x - y = 7$ и $x^2 + xy + y^2 = 13$;

3) $x - y = 13$ и $x^2 + xy + y^2 = 7$; 4) $x - y = 91$ и $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Решавањем ова четири система добијају се и сва решења датог проблема: (- 5, - 6); (3, - 4); (4, - 3); (6, 5). Δ

<u>ПРИМЕР 145.</u> *Мејснеров проблем: У скупу природних бројева решити систем једначина:* $x + y = zt$, $z + t = xy$.[52]

РЕШЕЊЕ: Ако се дате једначине саберу добија се једначина $xy + zt = x + y + z + t$, одакле је $xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2$. Факторизацијом се добија следећа једначина: $(x - 1)(y - 1) + (z - 1)(t - 1) = 2$. Разликују се три случаја:

---

[51] Задатак је са 1. МО у Пољској 1949. године. Видети књигу Старшевич С, Бровкин Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978.

[52] Задатак је са 29. Московске МО из 1967. године. Видети књигу Гальперин Г.А., А.К. Толпыго: Московские математические олимпиады – "Просвещение", Москва, 1987.

1) Ако је $(x-1)(y-1) = 0$, онда је $(z-1)(t-1) = 2$. Тада је је $x = 1$ или $y = 1$, а из $(z-1)(t-1) = 2$ се добијају две могућности: $z = 2$, $t = 3$ или $z = 3$, $t = 2$. Тада је $x + y = 6$ и $xy = 5$, па се добијају следећа решења: (1, 5, 2, 3); (1, 5, 3, 2); (5, 1, 2, 3); (5, 1, 3, 2).

2) Ако је $(x-1)(y-1) = 1$ и $(z-1)(t-1) = 2$, онда је $x = y = z = t = 2$.

3) $(x-1)(y-1) = 2$ и $(z-1)(t-1) = 0$, добијају се решења која су симетрична са случајем под 1). Дакле решења су: (2, 3, 1, 5); (2, 3, 5, 1); (3, 2, 1, 5); (3, 2, 5, 1).

Према томе једначина има укупно 9 решења. Δ

<u>ПРИМЕР 146.</u> Одредити све целе бројеве x, y и z који задовољавају једначине $z^2 - xy = x + y + 6$ *и* $x^2 + y^2 = z^2$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$, онда је прва једначина система постаје $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, па се множењем са 2 добија $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy = 14$. Добијена једначина $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 14$ има решења ако су сабирци 1^2, 2^2 и 3^2.

Разликовањем случајева добијају се решења друге једначине $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, односно једначине $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 14$. Та решења су: (2, -1); (-1, 2); (0, 3); (3, 0); (4, 3); (3, 4). Очигледно да другу једначину $x^2 + y^2 = z^2$ задовољавају само решења $(x, y, z) \in \{(0, 3, 3); (3, 0, 3), (3, 4, 5); (4, 3, 5)\}$.

<u>ПРИМЕР 147.</u> Доказати да систем једначина: $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + z^2 = t^2$ *нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$ и $y^2 + z^2 = t^2$, онда је $x^2 + t^2 = 2z^2$. Добијена једначина има решења $x = x_o - t_o$, $t = x_o + t_o$, где су x_o и t_o решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$.[53] Како је опште решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$ дато формулама $x_o = 2mn$, $t_o = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће једначина $x^2 + t^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = m^2 - n^2 - 2mn$, $t = m^2 - n^2 + 2mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Како је из друге једначине система $y^2 = t^2 - z^2$, то је $y^2 = (m^2 - n^2 + 2mn)^2 - (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 2mn - m^2 - n^2) = (2m^2 + 2mn)(2mn - 2n^2) = 2m(m + n)2n(m - n)$. Дакле, $y^2 = 4mn(m^2 - n^2)$. Нека је $D(m, n) = d$. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $m = ad$ и $n = bd$. Следи да је $y^2 = 4mn(m^2 - n^2) = 4ad \cdot bd(a^2d^2 - b^2d^2) = 4ab \cdot d^4(a^2 - b^2)$.

[53] Видети поглавље 10.1.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4\ (a^2 - b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 - b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab\ (a^2 - b^2)$ био потпун квадрат потребно је да буде $a^2 - b^2 = к^2\, a \cdot b$, одно-сно $a^2 - к^2 a \cdot b - b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по a, решавањем једначине се добија

$$a_{1,2} = \frac{к^2 b \pm \sqrt{к^4 b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{к^2 b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}.$$

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = p^2$ има јединствено решење $p = 2$, $к = 0$.

Ако је $к = 0$, онда је $a^2 - b^2 = к^2\, a \cdot b = 0$, па је $a = b$, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

541. Ако су x, y и z цели бројеви, онда једначина $x^2 + y^2 = 13z^2$ има бесконачно много решења. Доказати. Могу ли се описати сва решења дате једначине.

542. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 7z^2$, сем тривијалног решења нема других решења у скупу целих бројева.

543. Опште решење Диофантове једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$ дато је формулама: $x = m^2 - 2n^2$, $y = m^2 + 4mn + 2n^2$ и $z = m^2 + 2mn + 2n^2$ (m и n су природни бројеви). Доказати.

544. Одредити природне бројеве a, b и c такве да је $a^2 + b^2 + 3c^2 = (a + b + c)^2$.

545. Одредити опште решење једначине $x^2 + 5y^2 = z^2$

546. Одредити опште решење једначине $x^2 + 2y^2 = 4z^2$.

547. Ако је p прост број, а m и n природни бројеви, онда су сва решења једначине $x^2 + py^2 = z^2$ дата формулама: $x = m(pn^2 - 1)$; $y = 2mn$ и $z = m(pn^2 + 1)$. Доказати.

548. Ако су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ природни бројеви онда бројеви $x_1 = -t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2$; $x_2 = 2t_1t_2$; ... ; $x_n = 2t_1t_n$ и $x_{n+1} = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2$ задовољавају једначину $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1}^2$. Доказати.

549. Доказати да систем једначина: $x + y = zt$, $z + t = xy$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

550. Доказати да систем једначина $x^2 + 7y^2 = z^2$ и $7x^2 + y^2 = t^2$ има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

551. Који су потребни и довољни услови да система једначина $x + py = n$ и $x + y = p^z$ има решење у скупу природних бројева, ако су n и p природни бројеви. Доказати да број решења који се добија при тим условима не може бити већи од 1. (Мађарска - 1905.)[54]

552. Доказати да за сваки природан број n једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y^2$ има решења у скупу природних бројева. (ДР Немачка 1981.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

553. Може ли се између једначина $x^2 + y^2 = p$ и $x^2 + y^2 = pz^2$ успоставити аналогија када је у питању вредности природног броја p за које једначине имају, односно немају решења.

554. Може ли се одредити опште решење једначине $x^2 + py^2 = z^2$, ако је p прост број?

555. Испитати за које вредности природног броја n Диофантова једначина $nx^2 + (n+1)y^2 = (n+2)z^2$ има целобројна решења?

[54] Ово је вероватно прва Диофантова једначина која се појавила на неком математичком такмичењу у свету.

11. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СТЕПЕНА n (n > 2)

После квадратних Диофантових једначина нормално је да се пажња посвети и неким алгебарским Диофантовим једначинама степена већег од два. Не упуштајући се у теоријска разматрања кроз примере ћемо илустровати неколико карактеристичних једначина трећег, четвртог и виших степена. Основни метод решавања ових једначина је коришћење идентичних алгебарских трансформација и већ познатих чињеница о Диофантовим једначинама.

<u>*ПРИМЕР 148.*</u> *Доказати да једначина $x^2 + y^2 = z^4$ има бесконачно много решења, ако су x, y и z цели бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 + y^2 = z^4 = (z^2)^2$, то је (x, y, z^2) Питагорина тројка. Значи да постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, z) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 - q^2$ и $z = p^2 + q^2$. Дакле, опште решење дате једначине је $x = 4pq(p^2 - q^2)$; $y = \left|4p^2q^2 - (p^2 - q^2)^2\right|$; $z = p^2 + q^2$. Из добијеног општег решења јасно је да дата једначина има бесконачно много целобројних решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 149.*</u> *Доказати да једначина $x^2 + 5 = y^3$ нема целобројних решења.*

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су бројеви x и y различите парности и да је $y^3 = x^2 + 5 > 0$. Ако је x непаран онда је $x^2 + 5 \equiv 2 \pmod 4$. Тај случај је немогућ, јер је тада y паран број, па је $y^3 \equiv 0 \pmod 4$. Ако је $x = 2p$ паран, а $y = 2q + 1$ непаран број, добијамо једначину $(2p)^2 + 5 = (2q + 1)^3$, односно $4p^2 + 5 = 8q^3 + 12q^2 + 6q^2 + 1$, па се после дељења са 2 добија $2(p^2 + 1) = 4q^3 + 6q^2 + 3q$. Како је десна страна једнакости дељива са q то мора бити и лева, па је $2(p^2 + 1) = кq$ ($к \in N$). Добија се једначина $q(4q^2 + (6 - к)q + 3) = 0$. Очигледно $q \neq 0$, јер би тада било $y = 2q + 1 = 1$, па је $x^2 + 5 = 1$, што није могуће. Дакле $4q^2 + (6 - к)q + 3 = 0$.

Решавањем квадратне једначине по непознатој q добија се $q_{1,2} = \dfrac{к - 6 \pm \sqrt{(к - 6)^2 - 48}}{8}$. Да би број q био цео дискримина-нта мора бити потпун квадрат, тј. $(к - 6)^2 - 48 = D^2$.

Решавањем добијене једначине по к и D добијају се вредности за које је q природан број. Дакле q = 1 или q = 3, па је y = 3 или y = 7. Тада је $x^2 + 5 = 27$ или $x^2 + 5 = 343$, па једначина нема целобројних решења. Δ

<u>ПРИМЕР 150.</u> Да ли једначина $x^2 + y^3 = z^4$ *има решења у: а) скупу простих бројева; b) скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: а) Разликују се два случаја: z = 2 и z > 2.

Ако је z = 2, онда је $z^4 = 16 = x^2 + y^3$. Јасно је да је $y^3 < 16$, па је $y < 3$, дакле y = 2. Тада је $x^2 = 8$, па једначина нема решења.

Ако је z > 2, онда је z непаран, па је и z^4 непаран број. То значи да на левој страни једнакости један број мора бити паран, а један непаран.

Ако је x = 2, једначина постаје $4 + y^3 = z^4$, па се добија да је $(z^2 + 2)(z^2 - 2) = y^3$. Могућа су два случаја: $z^2 + 2 = y^3$ и $z^2 - 2 = 1$ или $z^2 + 2 = y^2$ и $z^2 - 2 = y$. Како се из првог система једначина добија $y^3 = 5$, а из другог $y^2 - y = 4$, то у овом случају нема решења у скупу простих бројева.

Ако је y = 2, онда је $x^2 + 8 = z^4$, тј. $(z^2 + x)(z^2 - x) = 8$, па је $z^2 + x = 4$ и $z^2 - x = 2$. Како је решење добијеног система $z^2 = 3$ и x = 1, закључујемо да једначина нема решења у скупу простих бројева.

b) Из $y^3 = z^4 - x^2 = (z^2 + x)(z^2 - x)$, следи да је једна од могућности $z^2 + x = y^2$ и $z^2 - x = y$. Решавањем добијеног систем следи да је $x = \dfrac{y(y-1)}{2}$ и $8z^2 = 4y^2 + 4y$, па је $8z^2 + 1 = (2y + 1)^2$. Ако се уведу смене $a = 2y + 1$ и $b = 2z$, добија се $a^2 - 2b^2 = 1$ (Пелова једначина). Како ова једначина у скупу целих бројева има бесконачно много решења, то и дата једначина има бесконачно много решења која се могу описати следећим формулама:

$$y_к = \frac{1}{4}\left((3+2\sqrt{2})^к + (3-2\sqrt{2})^к - 2\right);$$

$$z_к = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^к - (3-2\sqrt{2})^к\right);$$

$$x_к = \frac{y_к(y_к - 1)}{2} \quad \text{(к је природан број).}$$

Нека од решења су: (0, 1, 1); (28, 8, 6); (1176, 49, 35)...Δ[55]

[55] Једначина је посебно третирана у скупу простих бројева, јер је решење дато у скупу целих бројева само једно од могућих решења.

<u>ПРИМЕР 151.</u> Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^3 – 100 = 225y$?

РЕШЕЊЕ: Како је $x^3 = 100 + 225y$ и како је десна страна дељи-ва са 5 то мора бити и лева, па је $x = 5к$. Добија се $125к^3 = 100 + 225y$, а после дељења са 25 једнакост $5к^3 = 4 + 9y$ или $5к^3 – 5y = 4y + 4$. Сада је $5(к^3 – y) = 4(y + 1)$, па $y + 1$ мора бити дељиво са 5. Ако се $y = 5m - 1$ $(m \in N)$ замени у последњу једначину, онда се добија да је $к^3 = 9m – 1$. Да би $к^3$ био облика $9m – 1$, мора к бити облика $3p - 1$. Следи да је $к^3 = (3p – 1)^3 = 9m – 1$ или $27p^3 – 27p^2 + 9p - 1 = 9m – 1$, тј $m = 3p^3 – 3p^2 + p$. Дакле, $x = 5к = 5(3p – 1)$ и $y = 5m – 1 = 5(3p^3 – 3p^2 + p) - 1$. За сваки цео број p добија се једно решење дате једначине што значи да једначина има бесконачно много решења. Δ

<u>ПРИМЕР 152.</u> Решити једначину $x^4 - y^4 = z^2$ у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са $y^4 + z^2 = x^4$ што значи да је (y^2, z, x^2) Питагорина тројка, тј. да постоје природни бројеви m и n такви да је:

1) $y^2 = 2mn$, $z = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 – q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = 4pq\,(p^2 – q^2)$.

Нека је $D(p, q) = d$.

Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $p = ad$ и $q = bd$. Следи да је $y^2 = 4pq\,(p^2 - q^2) = 4ad \cdot bd\,(a^2d^2 – b^2d^2) = 4ab \cdot d^4\,(a^2 – b^2)$.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4\,(a^2 – b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 – b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab\,(a^2 – b^2)$ био потпун квадрат потребно је да важи релација $a^2 – b^2 = к^2\,a{\cdot}b$, односно $a^2 - к^2a{\cdot}b – b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по непознатој a, решавањем добијене једначине следи да је

$$a_{1,2} = \frac{к^2b \pm \sqrt{к^4b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{к^2b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}\,.$$

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = p^2$ има јединствено решење $p = 2$, $к = 0$.

Ако је к = 0, онда је $a^2 - b^2 = к^2 a \cdot b = 0$, па је a = b, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви.

2) $z = 2mn$, $y^2 = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 - q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = \left|(p^2 - q^2)^2 - 4p^2q^2\right| = \left|p^4 + q^4 - 6p^2q^2\right|$.

Нека је D(p, q) = d. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је p = ad и q = bd. Следи да је $y^2 = d^4\left|a^4 + b^4 - 6a^2b^2\right| = d^4\left|(a^2 - b^2)^2 - 2a^2b^2\right|$.

Дакле, израз $\left|a^4 + b^4 - 6a^2b^2\right|$ мора бити потпун квадрат. Коришћењем метода дискриминанте се доказује да је то немогуће. Δ

11.1. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА МАРКОВА

Диофантова једначина Маркова има облик $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, где су x, y и z цели бројеви. Марков [56] је дату једначину решио користећи искључиво методе елементарне математике.

Тривијално решење дате једначине је x = y = z = 0. Једно од могућих решења једначине је и x = y = z = 1.

Очигледно је да је једначина симетрична и да ако је (a, b, c) једно њено решење онда је решење свака пермутација бројева a, b, c. Међутим, јасно је и да ако је (a, b, c) једно решење једначине, онда је решење и тројке (-a, -b, c), (-a, b, -c) и (a, -b, -c). Због тога ћемо дату једначину посматрати само у скупу природних бројева, јер се остала целобројна решења дефинисана претходним особинама.

Нека је (a, b, c) једно решење Диофантове једначине Маркова. Онда је a једно од решења једначине $x^2 + b^2 + c^2 - 3xbc = 0$. Ако дату једначину посматрамо као квадратну једначину по x, онда она поред решења x = a има још једно решење x = a', при чему на основу Виетових правила важе једнакости $a + a' = 3bc$ и $aa' = b^2 + c^2$. Како је a > 0, то је и a' > 0. Тако решење (a, b, c) дефинише такозвано "суседно" решење (a', b, c).

За решење (1, 1, 1) "суседно" решење по координати x је решење (a', 1, 1) где је a' решење једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$ које је различито од 1. Дакле a' = 2, а ново решење једначине Маркова је (2, 1, 1).

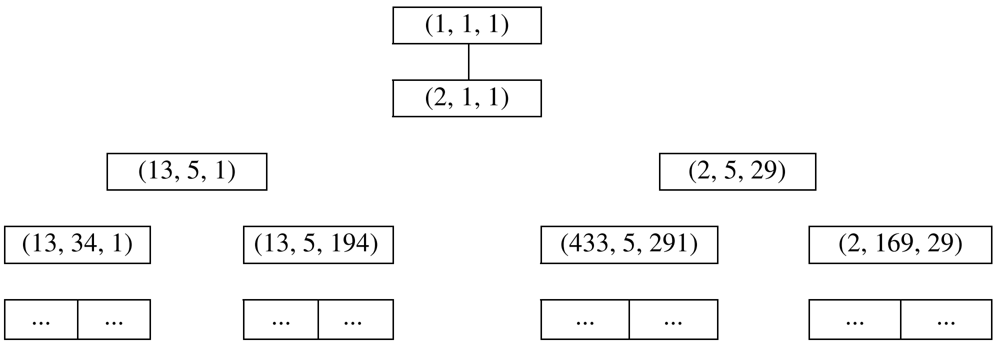
[56] Руски математичар и академик Андреј Андрејевич Марков (1856-1922) је 1879. године решио дату једначину

Решења (1, 1, 1) и (2, 1, 1) Марков назива сингуларним.

За решење (2, 1, 1) "суседно" решења по координати y је решење (2, b, 1), где је b решење једначине $y^2 - 6y + 5 = 0$ различито од 1. Тако добијамо "суседно" решења (2, 5, 1).

Настављајући процес добија се да је за (2, 5, 1) "суседно" решење по координати 1 решење једначине $z^2 - 30z + 29 = 0$ које је различито од 1. Дакле c' = 29 и "суседно" решење (2, 5, 29). Слично по координати 2 "сусуедно" решење је решење једначине $x^2 - 15x + 26 = 0$. 5. Добија се a' = 13 и ново решење једначине Маркова је (13, 5, 1).

Ако се процес настави добија се следеће "дрво" решења:



Уопште свако несингуларно решење (a, b, c) генерише три "суседна" решења (a', b, c) (a, b', c) (a, b, c') при чему важе једнакости:

$a' = 3bc - a$ $\qquad$ $b' = 3ac - b$ $\qquad$ $c' = 3ab - c$.[57]

<u>*ПРИМЕР 153.*</u> *Ако су у решењу (a, b, c) једначине Маркова две координате једнаке онда и само онда је решење сингуларно. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако је решење сингуларно доказ је очигледан, јер су и у тројци (1, 1, 1) и у тројци (2, 1, 1) две координате једнаке.

Ако је решење једначине Маркова (a, b, b) онда је $a^2 + b^2 + b^2 = 3ab^2$ или $a^2 = (3a - 2)b^2$. Добија се $9b^2 = \dfrac{9a^2}{3a-2} = 3a + 2 + \dfrac{4}{3a-2}$. Број b ће бити природан, ако је $(3a - 2) \in \{1, 2, 4\}$. Дакле, a = 1 или a = 2. Тада је b = 1. Следи да су тражена решења (1, 1, 1) или (2, 1, 1). Δ

57 Детаљније о једначини Маркова видети у тексту М.Г. Крейн: Диофантово уравнение А.А. Маркова, Квант, Москва, 1985, број 4, стр. 13 – 16.

<u>*ПРИМЕР 154.*</u> *Ако је решење (a, b, c) несингуларно онда једно од "суседних" решења има максималну координату мању од максималне координате решења (a, b, c) , а два друга "суседна" решења имају максималну координату већу од максималне координате решења (a, b, c). Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Ако је несингуларно решење једначине Маркова (a, b, c) и ако је $a > b > c$, онда је $(b – a)(b – a') = b^2 – (a + a') b + aa' = b^2 - 3b^2c + b^2 + c^2 = 2b^2 + c^2 - 3b^2c < 3b^2 – 3b^2c = 3b^2(1 – c) < 0$. Како је $b – a$ негативно то је $b – a'$ позитивно, тј. $b > a'$. Следи да је $a > b > a'$, па је максимална координата суседног решења (a', b, c) једнака b, мања од максималне координате a решења (a, b, c).

Слично је $(a – b)(a – b') = a^2 – (b + b')a + bb' = a^2 – 3a^2c + a^2 + c^2 = 2a^2 + c^2 – 3a^2c < 3a^2 – 3a^2c = 3a^2(1 – c) < 0$. Како је $a - b$ позитивно то је $a – b'$ негативно, па је $b' > a$. Следи да је $b' > a > b$, па је максимална координата суседног решења (a, b', c) једнака b', већа од максималне координате a решења (a, b, c).

Аналогно се доказује да је $c' > a > c$, па је максимална координата суседног решења (a, b, c') једнака c', већа од максималне координате a решења (a, b, c).Δ

<u>*ПРИМЕР 155.*</u> *Свако решење Диофантове једначине Маркова се добија као једно од суседних решења у ланцу који почиње са сингуларним решењем (1, 1, 1).*

РЕШЕЊЕ: Нека је (a, b, c) несингуларно решење једначине Маркова. Тада на основу претходног примера постоји "суседно" решење (a_1, b_1, c_1) чија је максимална координата мања од максималне координате решења (a, b, c). Ако је (a_1, b_1, c_1) несингуларно решење једначине Маркова на основу претходног примера постоји "суседно" решење (a_2, b_2, c_2) чија је максимална координата мања од максималне координате решења (a_1, b_1, c_1).

Ако се процес настави, онда је очигледно да сва добијена несингуларна решења, тј. њихове максималне координате образују опадајући низ природних бројева који очигледно не може бити бесконачан, јер је скуп природних бројева ограничен одоздо. Зато се процес мора зауставити. Нека је $(a_к, b_к, c_к)$ оно решење код кога су координате једнаке. Ако је то тројка (1, 1, 1), онда је доказ завршен. Ако је то (2, 1, 1) онда је "суседно" решење за координату 2 (a', 1, 1), где је $a' = 3bc – a = 3·1·1 – 2 = 1$, па је почетно решење (1, 1, 1) чиме је доказ завршен. Δ

Из претходна два примера јасно је да једначина Маркова има бесконачно много решења која се добијају формирањем ланца решења, тј. генерисањем "суседних" решења, полазећи од основног решења (1, 1, 1).

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

556. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $2x^3 + xy = 7$.

557. Доказати да једначина $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + (x + y)^2$ има бесконачно много целобројних решења.

558. Доказати да једначина $x^3 - y^3 = x^2 + y^2 + z^2$ има бесконачно много целобројних решења.

559. Одредити све троцифрене бројеве који су једнаки кубу збира својих цифара.

560. У скупу целих бројева решити једначину $x^4 - xy^3 = x^2 + y^2 + (x + y)^2$.

561. Доказати да једначина $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + ... + (x + n)^3 = y^3$ (n је природан број) за свако n има решење у скупу целих бројева.

562. Доказати да једначина $x^2 - y^3 = 7$ нема решења у скупу природних бројева.

563. Одредити сва целобројна решења једначине $y^2 = x^3 + (x + 4)^2$.

564. Да ли је број решења једначине $x^2 + y^3 = z^2$ коначан или бесконачан?

565. Доказати да једначина $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$ нема целобројних решења.

566. a) Ако су A, B, C природни бројеви, онда је остатак при дељењу броја $A^2 + B^2 + C^2$ са 3 једнак броју датих бројева који нису дељиви са 3 или 0, ако су сва три дељива са 3. Доказати.

b) Сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ дата су формулама $x = 3A$, $y = 3B$ и $z = 3C$, где су A, B и C решења Диофантове једначине Маркова $A^2 + B^2 + C^2 = 3ABC$. Доказати.

567. a) Ако су A, B, C природни бројеви, онда је остатак при дељењу броја $A^2 + B^2 + C^2$ са 4 једнак броју непарних бројева међу бројевима A, B и C. Доказати.

b) Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ осим тривијалног решења (0, 0, 0) нема других целобројних решења. Доказати.

568. Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ има нетривијалних решења само за к = 1 и к = 3. Доказати.

569. Ако се сума квадрата три природна броја подели њиховим производом, колики је количник?

570. Доказати да су за свако решење једначине Маркова координате у паровима узајамно прости бројеви.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

571. Одредити све основе бројног система мање од 100, тако да је у тим бројевним системима број 2101 потпун квадрат. (СРЈ 1994.)

572. Одредити све природне бројеве a, b и c, такве да је $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$. (5. ЈБМО – Кипар 2001.)

573. У скупу целих бројева решити систем једначина: $x + y + z = 3$ и $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. (Србија 2002.)

574. Одредити све тројке (x, y, z) позитивних рационалних бројева таквих да је $x \le y \le z$ за које су $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ и xyz природни бројеви. (Мала олимпијада 1995.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

575. Дата је једначина $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 2006$. Одредити бар једно решење једначине у скупу природних бројева.

576. Дата је једначина $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$. Доказати да за сваки природан број n дата једначина има бар једно решење у скупу природних бројева.

577. Одредити два решења једначине $x(x + 1) = y(y + 1)(y + 2)$.

12. ИРАЦИОНАЛНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

И код ирационалних Диофантових једначина нећемо се упуштати у посебна теоријска разматарања већ ћемо низом примера илустровати карактеристичне проблемске ситуације везане за ирационалне Диофантове једначине, уз напомену да се при решавању ирационалних Диофантових једначина нарочито мора водити рачуна о домену дефинисаности проблема.

<u>*ПРИМЕР 156.*</u> *Одредити све природне бројеве a, b и c за које је испуњена једнакост* $\sqrt{a+\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$.

РЕШЕЊЕ: Како су под коренима позитивне величине, квадрирањем се добија $a + \frac{b}{c} = \frac{a^2 b}{c}$. Добијена једначина је еквивалентна са једначином $ac + b = a^2 b$, односно $c = \frac{b(a-1)(a+1)}{a}$. Како је број a узајамно прост са (a – 1) и (a + 1) то мора бити b = aк (к ∈ N).

Следи да је $c = к(a^2 - 1)$, па је опште решење проблема дато формулама: a = t, b = kt; $c = к(t^2 - 1)$ (к, t ∈ N; t ≠ 1). Δ

<u>*ПРИМЕР 157.*</u> *Дата је једначина* $\sqrt{x-\frac{1}{5}} + \sqrt{y-\frac{1}{5}} = \sqrt{5}$.

Одредити целобројна решења дате једначине.

РЕШЕЊЕ: Множењем дате једначине са $\sqrt{5}$ добија се једнакост $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5$, при чему је $0 \le 5x - 1 \le 25$ и $0 \le 5y - 1 \le 25$. Следи да је: $1 \le x \le 5$ и $1 \le y \le 5$. Ако је $5x - 1 = a^2$ и $5y - 1 = b^2$, онда је a + b = 5. Како је $x = \frac{a^2+1}{5}$ и $y = \frac{b^2+1}{5}$, целобројне вредности x и y добијају се само ако a и b узимају вредности 2 и 3, па су јединa решења дате једначине (1, 2) и (2, 1). Δ

<u>*ПРИМЕР 158.*</u> *Одредити све парове позитивних рационалних бројева x и y за које важи једнакост* $\sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}} = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем полазне једначине добија се еквивалентна једначина $x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy} = 2\sqrt{3} - 3 > 0$, па је $x > y$. Ако се добијена једнакости подели са $\sqrt{3}$ следи да је $x + y - 2\sqrt{xy} = 2 - \sqrt{3}$. Даљом трансформацијом добија се једнакост $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$. Сада је због почетног услова $x > y$, очигледно $x = \frac{3}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$ [58] Δ

ПРИМЕР 159. *Дата је једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2p}$, где је p прост број, а x и y природни бројеви. За које вредности p једначина има решење?* [59]

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем се добија да је $x + 2\sqrt{xy} + y = 2p$. Ако је $xy = a^2$, онда је $x + y = 2p - 2a$, па су x и y решења квадратне једначине $t^2 - 2(p - a)t + a^2 = 0$. Да би решења $t_{1,2} = \dfrac{2(p-a) \pm 2\sqrt{(p-a)^2 - a^2}}{2}$ добијене једначине била целобројна, мора дискриминанта $p^2 - 2ap = p(p - 2a)$ бити потпун квадрат. Како је p прост број, то важи ако је $p - 2a = pк^2$ $(к \in Z)$ тј. ако је $a = \frac{p}{2}(1 - к^2)$. Тада је $x = \dfrac{p(к+1)^2}{2}$ и $y = \dfrac{p(к-1)^2}{2}$. Како је $a > 0$, то је $1 - к^2 > 0$, па је $к = 0$. Тада је $x = y = \frac{p}{2}$. Једини прост број који је дељив са 2 је $p = 2$. Δ

ПРИМЕР 160. *Одредити природне бројеве x, y и z тако да важи једнакост* $\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}}_{y\ корена} = z$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $y = 1$, онда је $\sqrt{x} = z$, $x = к^2$, $y = 1$, $z = к$ $(к \in N)$.

---

58 Проблем је са такмичења у Великој Британији 1970. године

59 Проблем је дат на Републичком такмичењу из математике за ученике средњих школа - Србија 1982. и 27. Московској математичкој олимпијади 1967.

Нека је $y \geq 2$. Претпоставимо да је $x + \sqrt{x} = к^2$ ($к \in N$). Како је $\sqrt{x} = к^2 - x$ и како су и к и x природни бројеви то је и број $\sqrt{x} = a$ природан број. Међутим, важи и неједнакост $x = (\sqrt{x})^2 < x + \sqrt{x} = к^2 < x + 2\sqrt{x} + 1 < (\sqrt{x} + 1)^2$. Како између квадрата два узастопна природна броја ($\sqrt{x}$) и ($\sqrt{x} + 1$) нема потпуних квадрата добијена је противуречност, па једначина сем добијених, нема других решења. Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

578. Одредити најмање природне бројеве a и b ($b > 1$) такве да важи једнакост $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$.

579. Ако су x и y природни, а p и q прости бројеви онда једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{pq}$ нема решења. Доказати.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

580. Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y који задовољавају једначину $\sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x}}} = y$ (x се јавља 1964 пута). (4. СРМО - 1964.)

581. Одредити све целе бројеве x и y такве да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1976}$? (Кијевска МО - 1976.)

582. Колико целобројних решења има једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$? (Србија 1980.)

583. Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y који задовољавају једначину $\sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x}}} = y$ (x се јавља 1992 пута). (Србија 1992.)

584. Решити једначину $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1996}$ у скупу ненегативних целих бројева (СРЈ 1996.)

13. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Експоненцијалне Диофантове једначине заузимају важно место међу свим Диофантовим једначинама, јер њихово решавање је у суштини синтеза свих до сада реализованих метода. И у решавању експоненцијалних Диофантових једначина нема неких посебних алгоритама нити теоријских разматрања. Зато дајемо неколико занимљивих примера, јер ће они најбоље илустровати могуће методе.

<u>*ПРИМЕР 161.*</u> *Постоје ли природни бројеве x и y такви да важи једнакост* $2^x + 1 = y^2$?

РЕШЕЊЕ: Како је $2^x + 1 = y^2$, то је $2^x = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$. Изрази $y - 1$ и $y + 1$ су исте парности, а како је њихов производ 2^x, очигледно парни, па је $y + 1 = 2^a$ и $y - 1 = 2^b$ $(a + b = x,\ a > b)$. Одузимањем друге од прве једнакости добија се да је $2^a - 2^b = 2$. Следи да је $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$. Сада је јасно да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} - 1 = 1$, па је $b = 1$ и $a - b = 1$. Дакле, $a = b + 1 = 2$, па је $x = a + b = 2 + 1 = 3$. једино решење једначине је $x = 3$, $y = 2$. Δ

<u>*ПРИМЕР 162.*</u> *Одредити природан број x и прост број p тако да је* $x^4 + 4^x = p$.

РЕШЕЊЕ: Како је x природан број, то је p паран број, ако је x паран и p је непаран број, ако је x непаран број. Како је p = 2 једини паран прост број, и како једначина $x^4 + 4^x = 2$ нема решења то значи да је x непаран број. Разликују се две могућности.

1) Ако је $x = 1$, онда је $x^4 + 4^x = 5$, па је $(x, p) = (1, 5)$ једно решење.

2) Ако је $x > 1$, онда је $x^4 + 4^x = x^4 + 2^{2x} = x^4 + 2^{2x} + 2x^2 2^{\text{к}} - 2x^2 2^{\text{к}} = (x^2 + 2^x)^2 - x^2 \cdot 2^{x+1} = (x^2 + 2^x)^2 - (x \cdot 2^{\frac{x+1}{2}})^2$. Како је x непаран број, то је $x + 1$ паран број и добијени израз је у ствари разлика квадрата, па је $(x^2 + 2^x + x\cdot 2^{\frac{x+1}{2}})\,(x^2 + 2^x - x\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}) = p$. Како су за $x \geq 3$, очигледно оба фактора у производу већа од 1, то p није прост број.

Једино решење једначине је $(x, p) = (1, 5)$. Δ

<u>*ПРИМЕР 163.*</u> *Одредити целе бројеве x и y тако да је $2^x - 3^y = 5$.*

РЕШЕЊЕ: Како је $2^x - 3^y = 5$, то је $2^x = 3^y + 5 > 5$, па је $x \geq 3$. Тада се разликују следећи случајеви:

1) Ако је y = 0, онда је $2^x = 6$, па једначина тада нема решења.

2) Ако је y > 0, онда је $2^x = 3^y + 5$, то је $2^x \equiv (-1)^x \pmod 3$ и $3^y + 5 \equiv -1 \pmod 3$. Следи да је $2^x \equiv (-1)^x \equiv -1 \pmod 3$, па је x непаран број. Из релације $3^y = 2^x - 5$, слично је $3^y \equiv (-1)^y \pmod 4$ и $2^x - 5 \equiv -1 \pmod 4$, односно $3^y \equiv (-1)^y \equiv -1 \pmod 4$, па је и y непаран број. Дакле, x = 2a + 1 и y = 2b + 1. Тада је $2^{2a+1} - 3^{2b+1} = 5 = 8 - 3$. Добија се једнакост $2^{2a+1} - 8 = 3^{2b+1} - 3$, па је $8(2^{2a-2} - 1) = 3(3^{2b} - 1)$. Једнакост је могућа у само два случаја:

2.1.) Ако је $2^{2a-2} - 1 = 3^{2b} - 1 = 0$, па је 2a – 2 = 2b = 0. Следи да је a = 1, b = 0, па је x = 3 и y = 1.

2.2) Ако је парни део леве стране једнакости једнак парном делу десне стране и аналогно непарни део леве стране једнак непарном делу десне стране једнакости, онда је $8 = 3^{2b} - 1$ и $2^{2a-2} - 1 = 3$. Тада је 2b = 2 и 2a – 2 = 2, па је a = 2 и b = 1. Следи да је x = 5 и y = 3.

3) Ако y < 0, онда је $2^x - 5 = 3^y$. Како је $2^x - 5 \geq 1$, $0 < 3^y < 1$, једначина у овом случају нема решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 164.*</u> *Колико решења има једначина $(2x)^{2x} - 1 = y^{z+1}$, ако су x, y и z природни бројеви?*

РЕШЕЊЕ: Ако се једначина напише у облику $((2x)^x)^2 - 1 = y^{z+1}$ онда је она еквивалентна са једначином $((2x)^x - 1)((2x)^x + 1) = y^{z+1}$, а одавде је очигледно y непаран број. Тада је $(2x)^x + 1 = y^a$ и $(2x)^x - 1 = y^b$ при чему је a + b = z + 1. Ако се од прве једначине одузме друга добије се да је $y^a - y^b = 2$ или $y^b(y^{a-b} - 1) = 2$.

Како је y непаран број постоји само једна могућност $y^b = 1$, а $y^{a-b} - 1 = 2$. Дакле, $y^{a-b} = 3$, па је y = 3 и a – b = 1. Како је $y^b = 1$ то је b = 0, па је z + 1 = a + b = 1. Следи z = 0, што је немогуће, јер z мора бити природан број. Према томе једначина нема решења у скупу природних бројева. Δ

<u>*ПРИМЕР 165.*</u> *Одредити све целе бројеве x, y и z, такве да је израз $4^x + 4^y + 4^z$ потпун квадрат.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $4^x + 4^y + 4^z = a^2$ ($a \in N$). Приметимо да је лева страна једначине симетрична функција, што ће олакшати разматрање. Зато претпоставимо да је $x \geq y \geq z$. Разликује се неколико случајева:

1) Ако је било који од бројева x, y и z негативан једначина нема решења, јер лева страна једначине у том случају неће бити цео број.

2) Ако је $z = 0$, онда је $4^x + 4^y = a^2 - 1$, па је $4^y(4^{x-y} + 1) = (a + 1)(a - 1)$.

2.1) Ако је $y = 0$, онда је $4^x + 1 = a^2 - 1$. Очигледно је $4^x + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Ако је a непарно, онда је $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4$, а ако је a парно, онда је $a^2 - 1 \equiv -1 \pmod 4$. То значи да једначина у овом случају нема решења.

2.2.) Ако је $y > 0$, онда је лева страна једнакости паран број, па таква мора бити и десна. Дакле $a = 2p + 1$ ($p \in N$) и после сређивања се добија $4^y(4^{x-y} + 1) = 4p(p + 1)$, па следи $4^{y-1}(4^{x-y} + 1) = p(p + 1)$. Како је с десне стране једначине производ два узастопна броја, то мора бити и са леве, па је $4^{y-1} = 4^{x-y}$, односно $y - 1 = x - y$ или $x = 2y - 1$. Тада је $p = 4^{y-1}$, па је $a = 2p + 1 = 2\cdot4^{y-1} + 1 = 2^{2y-1} + 1$. Добија се бесконачно много решења једначине $(2к - 1, к, 0, 2^{2к-1} + 1)$.

3) Ако су x, y и z природни бројеви онда је $4^x + 4^y + 4^z = 2^{2x} + 2^{2y} + 2^{2z} = a^2$. Тада је $2^{2z}(2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1) = a^2 = 2^{2z} b^2$. Како је $2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1$ потпун квадрат мора бити $2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1 = 2^{2(x-z)} + 2\cdot2^{x-z} + 1 = b^2$, па је $x - z + 1 = 2y - 2z$. Дакле $x = 2y - z - 1$. Ако је $y = m$, $z = n$, онда је $x = 2m - n - 1$ и враћањем у једначину добија се једно решење дате једначине $(2m - n -1, m, n; 2^n(2^{2m-n-1} + 1))$.

При овоме треба водити рачуна да су, због симетричности једначине, решења све пермутације скупа $(2m - n -1, m, n)$.

<u>ПРИМЕР 166.</u> Одредити све природне бројеве n тако да једначина $n^x + n^y = n^z$ *има бесконачно много решења, ако су x, y и z природни бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Како су бројеви n^x и n^y исте парности то је њихов збир паран па и број n^z мора бити паран, што значи да је n паран број. Очигледно је $z > x$ и $z > y$, па се, не умањујући општост, може претпоставити да је $z > x \ge y$. Тада је једначина $n^x + n^y = n^z$ еквивалентна са једначином $n^y (n^{x-y} + 1) = n^z$ или $n^{x-y} + 1 = n^{z-y}$. Следи да је $n^{z-y} - n^{x-y} = 1$ или $n^{x-y} (n^{z-x} - 1) = 1$. Тада је $n^{x-y} = 1$ и $n^{z-x} - 1 = 1$, па је $x - y = 0$, а $n^{z-x} = 2$. Следи да је решење дате једначине $n = 2$ и $z - x = 1$. Значи да за $n = 2$ има бесконачно много тројки (x, y, z) таквих да $x = y = к$ и $z = к + 1$ које увек задовољавају једнакост: $2^к + 2^к = 2^{к+1}$. Δ

<u>ПРИМЕР 167.</u>Одредити природне бројеве x и y тако да је $x^y = y^x$.[60]

[60] Дати пример је са 11. Московске математичке олимпијаде 1948.

РЕШЕЊЕ: Приметимо одмах две чињенице: Тривијално решење једначине је $x = y$ и једначина је симетрична. Зато се, не умањујући општост, може препоставити да је $x \leq y$. Тада постоји ненегативан цео број а, такав да је $y = x + a$. Следи да је $x^{x+a} = (x + a)^x$. Одавде је $x^a = \left(\frac{x+a}{x}\right)^x$.

Како је лева страна једнакости природан број то мора бити и десна, па је $x + a = y$ дељиво са x. Дакле $y = кx$ ($к \in N$). Тада је $x^{кx} = (кx)^x$.

Тада је $x^к = кx$, па је $x^{к-1} = к$. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 1$, онда је $к = 1$, па је је $y = кx = x$. (тривијално решење)

2) Ако је $x > 1$ онда је и $к > 1$, па је:

2.1.) За $к = 2$, следи $x = 2$, па је $y = кx = 4$.

2.2.) Ако је $к \geq 3$, онда је $x^{к-1} - 1 = (x - 1)(x^{к-2} + x^{к-3} + ... + x + 1) \geq 2(к - 1) = 2к - 2$. Како је $2к - 2 > к - 1$, то је $x^{к-1} - 1 > к - 1$, па је $x^{к-1} > к$ и једначина нема више решења у скупу природних бројева.

Водећи рачуна о симетричности једначине закључујемо да су сва решења једначине $(x, y) \in \{(2, 4); (4, 2); (1, 1); (2, 2), (3, 3) ...\}$. То значи да једначина има бесконачно много решења Δ

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

585. Одредити све природне бројеве x, y, z, t и n за које важи једнакост $n^x + n^y + n^z = n^t$.

586. Одредити све природне бројеве x, y, z и t за које важи једнакост $4^x + 4^y + 4^z = 4^t$.

587. На колико начина се број 2^n ($n \in N$ и $n \geq 2$) може приказати у облику збира четири квадрата?

588. За које вредности природног броја n постоје природни бројеви x и y такви да је $x^{x+y} = y^n$ и $y^{x+y} = x^{2n} y^n$.

589. Одредити сва решења једначине $2^x + 1 = 3^y$, ако су x и y природни бројеви.

590. Нека је p прост број, а x и y природни бројеви. Решити једначине:

a) $p^x - 1 = 2^y$;

b) $p^x + 1 = 2^y$.

591. Одредити природне бројеве x, m и n тако да је $x^m = 2^n - 1$.

592. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x^{x+y} = (x + y)^y$.

593. Ако су x, y, z и t међусобно различити природни бројеви, онда једначина $x^x + y^y = z^z + t^t$ нема решења. Доказати.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

594. Решити једначину $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$, ако су x и y природни бројеви. (21. ММО - 1958.)

595. У скупу природних бројева решити систем једначина: $x^y = z$; $y^z = x$, $z^x = y$. (27. ММО - 1964.)

596. Одредити највећи цео број x такав да је 427 + 41000 + 4x потпун квадрат. (6. ССМО – 1972.)

597. Одредити све природне бројеве x, y и z и све просте бројеве p, q и r тако да важи $p^{2x} = q^y r^z + 1$. (Мала олимпијада - 1977.)

598. Одредити све целе бројеве x, y и z такве да је $x^2(x^2 + y) = y^{z+1}$. (Мала олимпијада - 1978.)

599. Одредити целобројна решења једначине $x^2 = 3^y + 7$. (Србија 1983.)

600. Одредити целобројна решења једначине $2^x = 3^y + 1$. (Србија 1983.)

601. Одредити природне бројеве m n такве да је $m^m + (m\ n)^n = 1984$. (Кијевска МО – 1984.)

602. Доказати да не постоје међусобно различити природни бројеви x и y такви да је $x^{y^x} = y^{x^y}$. (Србија 1987.)

603. Одредити све тројке (x, y, z) целих бројева за које важи $x^y - 2^z = 1$. (СФРЈ 1989.)

604. У скупу природних бројева решити једначину $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$. (Србија 1996.)

605. Одредити све парове природних бројева (x,y) који задовољавају једначину $x^y = y^{x-y}$. (2. ЈМБО – Грчка 1998.)

606. Одредити све парове (a, b) природних бројева који задовољавају једначину $a^{b^2} = b^a$. (38. ИМО – Аргентина 1997.)

607. Доказати да не постоји природан број n такав да је $8^n + 2^n + 1$ потпун квадрат. (СРЈ 1998.)

608. Одредити сва решења једначине $x^y + y = y^x + x$ у скупу природних бројева. (СРЈ 2001.)

609. У скупу простих бројева решити једначину $x^y - y^x = xy^2 - 19$. (21. БМО – Бугарска 2004.)

14. ВЕЛИКА ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА[61]

На маргинама Диофантове "Аритметике" Ферма је написао 45 коментара. Најзначајнији Фермаов коментар је № II, у коме Ферма коментарише задатак II_8 из Диофантове ″Аритметике″ који се односи на опште решење Питагорине једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Поводом резултата који је добио Диофант, тј. чињенице да Питагорина једначина има бесконачно много целобројних решења, Ферма пише: ″Међутим, немогуће је куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и уопште никакав степен већи од квадрата, на два степена с истим таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ, но за њега су маргине ове књиге заиста мале″[62].

Ферма тада није ни слутио да ће се један његов коментар (хипотеза) претворити у проблем који је читавих 358 година задавао главобоље математичарима (и аматерима) који су покушавали да за једноставну теорему пронађу и елементаран доказ. Еволуција доказивања велике Фермаове теореме показује да је само доказ за n = 4 у сфери елементарне математике. Зато се овде даје доказ управо за n = 4, а значајно компликованији докази за n = 5, 7, 11 ... могу остати за самостално истраживање ученика или још боље за рад са даровитима у току студија.

<u>ПРИМЕР 168.</u> Доказати да једначина $x^4 + y^4 = z^4$ нема решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Довољно је доказати да једначина $x^4 + y^4 = z^2$ нема решења, јер ако не постоји потпун квадрат, као збир два четврта степена, онда сигурно не постоји ни четврти степен.

Проблем решавамо методом "најмањег" решења.[63] Претпоставимо да проблем има решење, тј да постоје природни бројеви x_o, y_o и z_o такви да је $x_o^4 + y_o^4 = z_o^2$ и да је z_o најмањи природан број који задовољава дату релацију.

Ако је $x^4 + y^4 = z^{2,}$ онда се може претпоставити да су x, y и z у паровима узајамно прости и да је x паран, а y непаран број. Како су x^2, y^2 и z чланови основне Питагорине тројке, то постоје природни бројеви m и n такви да је $x^2 = 2mn$, $y^2 = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

---

[61] О великој Фермаовој теореми је биће речи у историјском осврту - видети прилог 1.

[62] Видети: Диофант - ″Аритметика″, Москва, 1974. – стр. 197.

[63] И метод "најмањег" решења је већ обрађиван у поглављу 4.10.

Тада је $y^2 + n^2 = m^2$, па су сада y, n и m чланови нове основне Питагорине тројке. То значи да постоје узајамно прости природни бројеви p и q такви да је $y = p^2 - q^2$, $n = 2pq$ и $m = p^2 + q^2$. Тада је очигледно $x^2 = 2mn = 4pq\,(p^2 + q^2)$.

С обзиром да су p и q узајамно прости, то су и pq и $p^2 + q^2$ узајмно прости. Да би број $4pq\,(p^2 + q^2)$ био потпун квадрат, мора сваки од фактора бити потпун квадрат, то јест морају постојати природни бројеви a, b и c, такви да је $p = a^2$, $q = b^2$ и $p^2 + q^2 = c^2$.

Тада је $p^2 + q^2 = a^4 + b^4 = c^2$, па бројеви a, b и c задовољавају полазну једначину $x^4 + y^4 = z^2$. Како је c очигледно мање од z_o, дошли смо до противуречности, са претпоставком, чиме је доказ завршен. Δ

*

Доказ велике Фермаове теореме за $n = 3$ извео је Ојлер још 1768. године, али је протекло преко сто година, до тренутка када је Гаус доказао теоријске основе које је у свом доказу, неосновано, користио Ојлер. Велику Фермаову теорему за $n = 5$ Лежен Дирихле је у јулу 1825. годне изложио у Парискoj академији наука, а Лежандр је у септембру 1825. године публиковао свој рад на исту тему. Свој доказ Дирихле је објавио 1828. године, али је он био веома сложен, и 1912. године га је значајно упростио Племељ. За следећи прост изложилац $n = 7$ доказ је извео Ламе 1839. године. Ламеов доказ касније је прилично усавршио Лебег.

И тако су се математичари читава три и по века бавили великом Фермаовом теоремом. У лето 1995. године у једном од престижних математичких часописа, ″Математички анали″, публикован је потпун доказ велике Фермаове теореме који је запремио цео број часописа (више од 100 листова). На тај начин, на крају 20. века, цео свет је признао, да је 358 година после свог настанка, велика Фермаова теорема, која је у суштини све то време била хипотеза, постала – доказана теорема. Енглески математичар Ендрју Вајлс, са сарадницима, је остварио своје дечачке снове. Доказао је велику Фермаову теорему, и ушао у историју.

ПРОБЛЕМИ ЗА УВЕЖБАВАЊЕ

611. Доказати да постоји више од 100 тројки природних бројева (x, y, z) таквих да је $x^{15} + y^{15} = z^{16}$.

612. Доказати да не постоје цели бројеви x, y и z такви да је $x^к + y^к = z^к$ при чему је $0 < x < к$; $0 < y < к$; $0 < z$ $(к \in N)$.

ЗАДАЦИ СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА

613. Ако су x, y и z природни бројеви такви да је x + y прост број, онда за сваки непаран природни број n, једначина $x^n + y^n = z^n$ нема решења. Доказати. (26. ММО 1963.)

614. Ако је $z \leq n$, онда једначина $x^n + y^n = z^n$ $(n \in N)$ нема решења у скупу природних бројева. Доказати. (Србија 2003.)

ПРОБЛЕМИ ЗА ИСТРАЖИВАЊЕ

615. Доказати да не постоје међусобно различити природни бројеви x, y, z и t такви да је $x^x + y^y = z^z + t^t$.

На крају "мале" збирке молим све колеге да ми грешке (којих сигурно има), као и елегантна решења појединих проблема, корисне предлоге и добронамерне сугестије доставе путем електронске поште на адресу: vandric@beotel.yu