″Немогуће је куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата.
И уопште никакав степен већи од квадрата, на два степена, с истим
таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ,
но за њега су маргине ове књиге заиста мале″

Пјер Ферма

4. ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ

Диофантове једначине представљају стару и значајну тему којом су се математичари бавили кроз богату историју математичких теорија и проблема. Истовремено, проблеми Диофантових једначина су и један од проблема којима се математичари и временски дуго баве. Матијашевичева теорема и решавање Фермаовог проблема дали су одговоре на два значајна проблема везана за Диофантове једначине, али тиме није затворен списак математичких непознаница везаних за ову интересантну тему. Отуда историјски осврт на Диофантове једначине има свој методички и историјски значај, јер је историјат Диофантових једначина у математичкој науци један од најинтересантнијих историјских путева, пошто је развој теоријске мисли о Диофантовим једначинама, најуже повезан са еволуцијом математике и развојем математичке симболике, математичких теорија и математичких метода уопште.

4.1. ХЕЛИОСОВО СТАДО[65]

Пародирајући наслов Архимедовог[66] списа *Мерења круга* и достигнућа у њему, Аполоније[67] је објавио дело с насловом *Средство за убрзавање порођаја*. Архимед му није остао дужан него је у једном задатку који је упутио Ератостену[68] и који је написао савршеним епским језиком, апострофирао баш Аполонија. Проблем који је поставио Архимед везан је за број бикова и крава на испаши на острву Сицилија и заиста је за ондашње доба био готово нерешив, јер упућује на огромне бројеве. Архимед пише:

Колико Сунце има бикова, израчунај за мене странче.
Размисливши, преброј их, ако ти мудрост није страна.
Некада их је на плодним пољима острва Тринакријске Сицилије
У четири стада много пасло.

65 Хелиос (Hellios) – грчки Бог Сунца;
66 Архимед (287-212. г. пре н.е.) – старогрчки математичар - један од најзначајнијих светских математичара свих времена
67 Аполониј Пергски (262-190. г. пре н.е)- старогрчки математичар познат по устројству теорије кривих другог реда
68 Ератостен Киренски (око 276-194. г. пре н.е) – познат као аутор Ератостеновог сита – једног од најефикаснијих алгоритама за селекцију простих бројева

По боји стада се разликоваше: блистало је једно млечно-белом бојом,
Друго је боје тамног морског таласа било,
Треће је риђе, а последње шарено било.
И у сваком стаду било је мужјака огромне снаге мноштво,
Па ипак, чувајући сразмерност овакву: замисли странче,
Број бикова белих био је тачно једнак
Половини тамних бикова и целом стаду и трећини бикова риђих;
Четвртина тамних бикова била је једнака
Шареним уз додавање целог стада и петине бикова риђих;
Број бикова шарене длаке према томе размотри:
Део шести и седми од стада сребрнкастих бикова
Такође са свим риђим ти њихов број изједначи.
У тим истим стадима крава је било оволико: број крава са белом длаком
Је био једнак четвртом и трећем делу тамног стада ако их сабереш заједно;
Четвртина тамних крава се опет равнала са
Шареним стадом, ако пети део додаш.
И ту бикове у заједничко стадо урачунаш.
Оне са шареном длаком једнаке су биле
Петом делу риђег стада уз додатак шестог дела.
Риђих крава је било две трећине белог стада са узетим седмим делом.
Колико Сунце има бикова, странче, ако тачно кажеш,
Посебно одредивши број напредних бикова,
Такође, посебно број крава, колико их је од сваке боје било,
Иако те нико незналицом назвати неће,
Па ипак, у мудраце нећеш убројен бити.
Па добро, узми у обзир каква су још својства броја бикова Сунца.
Ако бикове сребрне длаке са тамним помешаш
Тако да тесно стану у ширину и у дужину
Равномерно, тада ће на пространим пољима сицилијанским
У виду збијеног квадрата велику површину заузети.
Ако риђе и шарене у једно помешаш стадо,
Као степенице ће постати, почевши рачунање од јединице,
Тако да троугаону фигуру образују;
Боју других бикова нема потребе додавати.
Ако ти то нађеш странче, размисливши
И ако успеш тачно да одредиш сваког стада број,
Онда одлази, подичивши се победом и сматраће се
Да си у тој мудрости све до краја превазишао.[69]

[69] Овај грчки епиграм је 1773. године открио Г. Е. Лесинг

Ово је вероватно најстарији, записани, диофантски проблем у математичкој науци, познат као проблем Хелиосовог стада крава и бикова.

Ако се са X, Y, Z, T редом означи број белих, црних, мрких и шарених бикова, а са x, y, z, t редом број белих, црних, мрких и шарених крава, онда се на основу услова задатка могу написати следеће линеарне Диофантове једначине:

$$X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Y + Z\ ; \quad Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)T + Z\ ; \quad T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)X + Z$$

$$x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(Y + y); \quad y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(T + t); \quad t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z); \quad z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(X + x)$$

Датим једначинама потребно је додати још два услова:

$$X + Y = m^2\ ;\ \ T + Z = \frac{n(n+1)}{2}.$$

јер је из текста задатка јасно да је збир белих и црних бикова потпун квадрат, а збир мрких и шарених бикова троугаони број.

Наравно, проблем је веома сложен и изражен у савременим ознакама своди се на Пелову једначину $p^2 - 8 \cdot 4657 \cdot 2471 \cdot aq^2 = 1$, односно $p^2 - 410286423278424 \cdot q^2 = 1$.[70]

Скоро је сигурно да ни сам Архимед[71] није могао да реши проблем који је поставио, јер се једноставно ради о превеликим бројевима.

После више неуспешних покушаја проблем је решен 1880. године, када је доказано да најмањи укупан број говеда представља број који има 206 545 цифара. Тачан запис овог најмањег решења нађен је тек у ери рачунара. То решење је објављено 1980. године и у оригиналу заузима 47 страница компјутерског листинга. Иначе број белих бикова који је у задатку означен са X износи око $1598 \cdot 10^{206541}$, а укупан број бикова је око $7760 \cdot 10^{206541}$.

У коментару овог проблема И.Н. Веселовски пише да би бројеви о којима је реч могли стати у књигу на око 660 страница, под условом да на свакој страници буде око 2500 цифара. Ово је интересантно не само због хумористичног почетка Архимедовог проблема Хелиосовог стада, већ и због шаљивих коментара који су уследили по решењу проблема, а који се своде на то да је Сицилија велико острво, али да тешко да је толики број говеда могао тамо да стане.[72]

У нашој математичкој литератури проблем Хелиосовог стада шире третира и Ђура Курепа.[73] У његовој "Алгебри" додуше нема саме формулације проблема, али је дат уређен систем једначина који очигледно произилази из услова задатка:

---

[70] др Зоран Каделбург: Архимедов проблем о говедима – Математички лист број 6/36 – Београд, 2002.
[71] Видети [4.37.] Архимед: Сочинения - Москва, 1962, стр. 372-377;
[72] др Зоран Каделбург: Архимедов проблем о говедима – Математички лист број 6/36 – Београд, 2002.
[73] Видети [4.40.] др Ђуро Курепа: Виша алгебра (2. део) – Београд, 1970, стр. 1323, поглавље 6.4.5.

$$B - Š = \frac{5}{6}S; \quad S - Š = \frac{9}{20}\ M; \quad M - Š = \frac{13}{42}\ B;$$

$$B = \frac{7}{12}(S + s); \quad s = \frac{9}{20}\ (M + m); \quad m = \frac{11}{30}\ (Š + š); \quad š = \frac{13}{42}\ (B + b)$$

где су B, Š, S и M редом бројеви белих, шарених, сивих и мрких бикова, а b, š, s, m, редом бројеви белих, шарених, сивих и мрких крава у стаду.

Курепа наводи и најмање тражено позитивно решење проблема: B = 10 366 482; Š = 4 149 387; S = 7 460 514 и M = 7 358 060; b = 7 206 360; š = 5 439 213; s = 4 893 246 и m = 3 515 820.

Упоређивањем два дата решења очигледно је да се ради и о две различите формулације проблема, тј. да је проблем који наводи проф. Курепа поједностављен. У њему се, наиме, не појављују услови о квадратном, односно троугаоном броју, који значајно компликују решење. Зато се и решења проблема евидентно разликују.

4.2. ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА

Линеарна Диофантова једначина с две непознате се у данашњем облику појављује у Индији у раном средњем веку. Брахмагупта[74] је познавао једноставну методу за добијање целобројних решења те једначине. У Европи су прва сусретања са линераном Диофантовом једначином везана за почетак XVII века. Алгоритам за решавање линеарне Диофантове једначине, међу првима, дао је Баше де Мезирјак,[75] познат као преводилац Диофантове "Аритметике" на латински језик. Један од највећих светских математичара свих времена, Леонард Ојлер.[76] у V поглављу своје "Алгебре" из 1770. године описује свој метод за решавање линеарне Диофантове једначине.[77] Поуздани методи и значајне теореме које говоре о решивости линераних Диофантових једначина са две и више променљивих датирају из друге половине XIX века.

Проблеме који захтевају да се у њиховом решавању користе системи од две линеране Диофантове једначине, јављају се у Кини почетком средњег века. Пригодни проблеми се јављају и у арапским математичким круговима у X веку. Њихова решења је дао Фибоначи.[78] Коначан одговор о решивости система линераних Диофантових једначина дали су Смит[79] и Фробениус.[80]

[74] Брахмагупта (598-660) – Индијски математичар и астроном значајан по радовима из алгебре
[75] Баше де Мезирјак (Claude Gaspard Bachet de Meziriac 1581-1638) – француски математичар
[76] Леонард Ојлер (Leonhadr Euler 1707–1783)
[77] Ојлеров метод за решавање линеарне Диофантове једначине дат је у поглављу 6.
[78] Фибоначи (Леонардо из Пизе - око 1170-1250), познати италијански математичар
[79] Смит (Smith H.J.S 1826-1883), енглески математичар
[80] Фробениус (Frobenius F.G. 1849 – 1917. г.), немачки математичар

4.3. ПИТАГОРИНЕ ТРОЈКЕ[81]

Легенда, чији текст је данас доступан чак и у стиховима, каже да је Питагора у част открића теореме која се данас у математичкој науци користи као Питагорина теорема, боговима као жртву принео бика (неке легенде говоре о чак сто бикова, а неки математичари су од те чињенице касније правили велике и шаљиве коментаре). Међутим, данас је извесно да та теорема није ни Питагорино откриће, а чак је он није у општој форми први ни доказао. Наиме, Питагорину теорему користили су и Египћани бар 1500 година пре Питагоре и отуда се понегде, у теорији, троугао чије су дужине страница 3, 4 и 5, за који су стари Египћани знали да правоугли, назива Египатски троугао.

Познато је да су Питагорину теорему, која има значајне везе са Питагориним бројевима, Питагорином једначином или Питагориним тројкама у својим грађевинским подвизима оног времена поред Египћана користиле и древне цивилизације у Вавилону, Кини, Индији и Мексику.[82]

Први теоријски и логички утемељен доказ Питагорине теореме потиче још од Еуклида,[83] мада је евидентно да су своје такође геометријске доказе имали у Египту (у време фараона Аменемхета – око 2000 година пре н.е), Вавилонији (у време цара Хамурабија - 18. век пре н.е.), Кини (1200 година пре н.е.) и Индији (6. век пре н.е.). Иначе, данас има близу 600 различитих доказа Питагорине теореме.[84]

Историја рационалних и целобројних решења Питагорине једначине $x^2 + y^2 = z^2$, данас познатих као Питагорини бројеви или Питагорине тројке (x, y, z), нераздвојива је од историје Питагорине теореме и има такође дугу прошлост. Дакле, Питагорини бројеви су у математичкој науци третирани значајно пре Питагоре. Питагорина тројка (3, 4, 5) је била позната свим древним културама. На пример, баш та тројка је записана у кинеским документима старим преко три хиљаде година, али и нешто касније у јеврејским списима (друга Мојсијева књига).[85]

Древне цивилизације су знале и за друге Питагорине тројке, о чему сведоче глинене плочице старе преко 3000 година исписане клинастим писмом,[86] али и Ахмесов[87] и Московски[88] папирус.

[81] Питагора са Самоса (570 – 500. г. пре н.е), један од најзначајнијих и најпродуктивнијих старогрчких математичара и филозофа
[82] Алексей Кудашев: "Теорема Пифагора и способы её доказательства" – Москва, 1997..
[83] Еуклид (365 – 300 г. пре н.е.), старогрчки математичар, аутор првих до данашњих цивилизација доспелих теоријских радова из математике, доказао је Питагорину теорему у својим "Елементима" - књига 1, глава 47
[84] Видети: http://physics.nad.ru/matboard/messages/2263.html
[85] Видети [4.35.] Jože Graselli: Diofantske enačbe – Ljubljana, 1984. – str. 131.
[86] Видети [4.35.] Jože Graselli: Diofantske enačbe – Ljubljana, 1984. – str. 131.

Неки извори говоре[89] да су још Вавилонци поред петнаест разних Питагориних тројки знали и опште решење Питагорине једначине. Овакве наводе потврђује и чињеница да је већ у то доба била позната Питагорина тројка (4961, 6480, 8161) за коју је, с обзиром на величину бројева које садржи, мало вероватно да је добијена експерименталним путем.[90]

Поуздано се зна да је још пре Питагоре коришћено једнопараметарско решење Питагорине једначине у облику $x = \frac{a^2 - 1}{2}$; $y = a$ и $z = \frac{a^2 + 1}{2}$, где је a неки непаран природан број. [91] Питагора је, такође, користио једнопараметарску формулу $x = 2k^2 + 2k$; $y = 2k + 1$ и $z = 2k^2 + 2k + 1$ (k је било који природан број) која такође генерише бесконачно много примитивних Питагориних тројки[92] и која се добија из претходне формуле простом сменом $a = 2k + 1$.

Обе формуле се приписују Питагори,[93] али су обе превише специјалне и обухватају само једну, додуше бесконачну класу Питагориних троуглова (код којих је једна, и то већа, ″катета″ за 1 мања од ″хипотенузе″).

Иако многи историчари математике, данас општеприхваћену формулу, која генерише све Питагорijне тројке: $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$; $z = m^2 + n^2$ (m и n су природни бројеви), приписују Диофанту, та формула је вероватно Еуклидово дело,[94] бар у смислу првог писаног трага. Диофант се једноставно тим формулама веома често користио, а вероватно је и први који је успео да изведе и формалан доказ тог тврђења.[95]

Диофанту се с правом може приписати и откриће да је број Питагориних тројки бесконачан,[96] јер у коментару решења 19. проблема из треће књиге ″Аритметике″ дословце каже: ″Ми знамо да се разлагање датог квадрата на два квадрата може извести на бесконачно много начина″. Додуше ова формулација је помало непрецизна, али је нама данас потпуно јасно шта је Диофант у ствари хтео да каже.

87 Ахмесов (Рајндин) папирус датира из 20. века пре н.е. (мада се верује да је то само препис документа из 30. века пре н.е.). Рајнда је био египатски фараон, Ахмес писац папируса, а документ се данас чува у Британском музеју у Лондону.
88 Московски математички папирус се чува у Државном музеју у Москви и датира такође око 2000. г. пре н.е.
89 Видети: http://applied.math.utsa.edu/~gokhmann/ecz/l_p000/html
90 Видети: Jože Graselli: Diofantske enačbe – Ljubljana, 1984. – str. 131.
91 Видети: Б.В. Болвбарский: Очерки по истории математики – Москва, 1979. - стр. 56.
92 Видети: Jože Graselli: Diofantske enačbe – Ljubljana, 1984. – str. 131.
93 Прокл Диадох (410 – 485. г. н.е.) помиње ове формуле као Питагорине у коментарима Еуклидових ″Елемената″. Видети Диофант: "Аритметика" – Москва, 1974. – стр. 9
94 Видети Еуклид: Елементи - Књига 2, глава 29.
95 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 2, проблем 8, стр. 64.
96 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 3, проблем 19, стр. 88.

4.4. ДИОФАНТОВА ″АРИТМЕТИКА″

Историја математичке мисли бележи Диофанта Александријског[97] као једну од најзначајнихи личности у еволуцији математичких, посебно алгебарских идеја. У Диофантовој ″Аритметици″ која садржи 6 сачуваних књига (од написаних 13), и одломцима књиге о многоугаоним бројевима, систематично су изложене основе елементарне алгебре. Изложен је приличан број проблема који се своде на неодређене једначине различитих степена и приказане методе за решавање таквих једначина у скупу позитивних рационалних бројева.

Диофант, први у историји математике помиње вишедимензионе геометрије. Његово излагање је чисто аналитичко. За означавање непознатих и њихових степена, супротних и реципрочних бојева, минуса и једнакости Диофант користи скраћени запис речи или симболе. Диофант је имао прецизну представу о негативним бројевима и знао је да је квадрат негативног броја позитиван број.

″Аритметика″ је, у данашњем смислу речи, зборник задатака, који садржи 189 проблема. Међутим, пажљивим проучавањем ″Аритметике″ јасно се може уочити да то није обична збирка задатака, јер она садржи и више решења појединих задатака, и решења добијена коришћењем различитих метода, као и неопходна објашњења.

Иако на први поглед ″Аритметика″ не представља теоријски рад, даљим истраживањем се долази до очигледне чињенице да конкретни проблеми служе као илустрације општих метода. У античкој математици је то практично био стил: методе се не излажу одвојено од задатака, већ се разоткривају у процесу решавања проблема. Импонује Диофантова систематичност, методичност и поступност у излагању задатих проблема.[98]

4.4.1. ПРВА КЊИГА ДИОФАНТОВЕ ″АРИТМЕТИКЕ″

Прва књига Диофантове ″Аритметике″[99] садржи прилично детаљан увод у коме у 11 тачака он дефинише појмове и симболе које ће у даљем излагању користити.[100] У тачки 1. он даје појам броја, а у тачки 2. уводи симболе за бројеве и њихове степене. Степени се третирају по адитивном принципу тако да се, на пример, пети степен означава као квадрат-куб, шести степен као куб-куб итд. То је био обичај и пре Диофанта, [101] али и после њега.

[97] Диофант Александријски (200 – 284. г. н.е.) је последњи велики антички математичар, а први који се бавио једначинама са целобројним или рационалним решењима.

[98] Видети Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 315.

[99] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 1, стр. 37.

[100] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 1, стр. 37-41.

[101] Херон (1. век н.е) - Геометрика (2. део)

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

У Европи је први адитивни принцип формирања степена у 13. веку користио Леонардо из Пизе (Фибоначи).[102] У тачки 2. Диофант уводи и појам јединице, а у тачки 3. вредности реципрочне датим степенима. Тачка 4. карактеристична је по томе што се у њој дефинише множење степена. У тачки 5. дефинише се производ броја и њему реципрочног броја, а у тачки 6. множење са јединицом као неутралним елементом. Тачка 9. говори о производу негативног и позитивног броја и два негативна броја и у њој се дефинише симбол који одговара нашем данашњем минусу. Поред овог симбола, Диофант уводи симбол за квадрат непознатог броја и симбол једнакости, али не користи никакве посебне симболе за сабирање и множење. Тачка 11. садржи закон дистрибуције збира у производ.

Сви Диофантови проблеми[103] у првој књизи, а има их тачно 39 су одређени, јер представљају или једначине са једном непознатом или системе једначина код којих је број једначина једнак броју непознатих. Проблеми, без обзира да ли се ради о системима једначина или једначинама су задати методички, од лакшег ка тежем. Чак и они проблеми који су самом својом формулацијом неодређени, постају решиви, јер им се у самом процесу решавања отклања додавањем нових услова (задаци I_{14}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{25})[104].

На пример у проблему I_{14} (одредити два броја таква да њихов производ и њихов збир имају задати однос) који се у суштини своди на једначину $xy = к(x + y)$, Диофант прво за коефицијент пропорционалности производа и збира фиксира $к = 3$, а потом примећује да се један од бројева x и y може задати произвољно Узимајући за $y = 12$, лако се добија $x = 4$.[105] Интересантно је да потпуно исти проблем Диофант решава и у другој књизи, сада као проблем II_3, који третира као неодређену једначину у којој бира само коефицијенат пропрционалности $к = 6$. Вредности за x и y добија тако што узима да су они управо пропорционални, тј. $x = t$, $y = \beta t$.[106]

У првој књизи Диофантове "Аритметике" је неколико задатака (I_{27}, I_{28}, I_{29}, I_{30})[107] дато у облику система две једначине са две непознате који је еквивалентан квадратној једначини. Занимљиво је да код ових проблема Диофант поставља услов да дискриминанта буде потпун квадрат, чиме постиже да решења добијене једначине буду рационална.

---

102 Леонардо из Пизе (Фибоначи) (око 1170-1250. године) је познати италијански математичар заслужан за чувено дело "Књига о абаку" (1202)

103 У овом раду проблеми из Диофантове "Аритметике" ће се означавати симболима X_y, где главни симбол означава број књиге, а индекс број проблема (на пример II_{17} је ознака за 17. задатак из 2. књиге)

104 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 1, стр. 53-56.

105 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 1, стр. 47-48.

106 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 2, стр. 62-63.

107 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 1, стр. 56-57.

4.4.2. ДРУГА КЊИГА ДИОФАНТОВЕ ″АРИТМЕТИКЕ″

Проблеми друге књиге Диофантове ″Аритметике″[108] већ се конкретно односе на Диофантове једначине. Првих десет проблема представљају једначине облика

$$F_2(x, y) = 0 \quad (*)$$

где је $F_2(x, y)$ полином другог степена с рационалним коефицијентима. На тим задацима Диофант приказује свој метод и у суштини доказује парцијални случај Хилберт-Хурвиц-Поенкареове теореме.[109] Ако једначина (*) има рационално решење, онда има и бесконачно много рационалних решења, при чему непознате могу бити исказане као рационалне функције једног параметра: $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Општи метод Диофанта може се илустровати на примеру проблема II_8[110] чији би буквални превод био: ″Дати квадрат разложи на два квадрата″, а који у суштини представља Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$.

Диофант је конкретно желео да 16 разложи на два квадрата x^2 и $y^2 = 16 - x^2$. Решење је постављено на следећи начин: Како $16 - x^2$ мора бити потпун квадрат, нека је то квадрат броја $y = 2x - 4$. Добија се једначина $16 - x^2 = (2x - 4)^2$ или после квадрирања $16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16$. Тада је $5x^2 = 16x$, тј $x = 0$ или $x = \frac{16}{5}$, па је тражено нетривијално разлагање $\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 4^2 = 16$.

Поставља се логично питање зашто је Диофант бирао баш $2x - 4$? Одговор је врло једноставан. Зато што је после квадрирања израза $y = 2x - 4$ добијао елементарну квадратну једначину, јер су се 16 са једне и са друге стране једначине поништавали.

Међутим, до сличног резултата се може доћи и ако се узме, на пример $y = 5x - 4$. Тада је $16 - x^2 = (5x - 4)^2$ или после квадрирања $16 - x^2 = 25x^2 - 40x + 16$, па је $26x^2 = 40x$, тј $x = 0$ или $x = \frac{20}{13}$. Очигледно је у том случају тражено разлагање $\left(\frac{20}{13}\right)^2 + \left(\frac{48}{13}\right)^2 = 4^2 = 16$. Овај пример доказује две ствари: да се дати метод може уопштити и да дата једначина у скупу рационалних бројева, вероватно има бесконачно много решења.

Дакле, у општем случају се посматра једначина $x^2 + y^2 = z^2$. Нека је по узору на Диофантов метод $y = px - z$ (x, y, z су природни бројеви, а p је рационалан број).

[108] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 2, стр. 62.
[109] Видети: http://www.ega-math.narod.ru/Reid/book.htm
[110] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 2, стр. 64.

Тада је $z^2 - x^2 = (px - z)^2$, а после квадрирања се добија $z^2 - x^2 = p^2x^2 - 2pxz + z^2$. Решавањем добијене једначине по x добија се $(p^2 + 1)x^2 = 2pxz$, тј. $x = \frac{2pz}{p^2+1}$.[111]

Следи да је $y = \frac{p^2-1}{p^2+1}z$, а то значи да је: $\frac{x}{z} = \frac{2p}{p^2+1}$ и $\frac{y}{z} = \frac{p^2-1}{p^2+1}$. Очигледно да је формулама $x = 2p$, $y = p^2 - 1$ и $z = p^2 + 1$, дефинисано бесконачно много рационалних решења дате једначине.

Ако се у претходним једнакостима узме да је p рационалан број, тј $p = \frac{m}{n}$, где су m и n узајамно прости природни бројеви добија се $\frac{x}{z} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ и $\frac{y}{z} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$.

Сада је јасно да је формулама $x = 2mn$; $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$ дефинисана једна целобројна Питагорина тројка. Диофант није ништа експлицитно написао о броју решења али је очигледно да за сваки број p у првом, односно за сваки пар бројева (m, n)[112] у другом случају дефинисана једна Питагорина тројка, тј. Питагорина једначина има бесконачно много решења. Иначе овај Диофантвов параметарски метод се може успешно применити на добар број квадратних Диофантових једначина код којих је познато бар једно, основно целобројно (или рационално) решење.

4.4.3. ОСТАЛЕ КЊИГЕ ДИОФАНТОВЕ ″АРИТМЕТИКЕ″

Трећа књига Диофантове ″Аритметике″ представља логичан наставак претходних Диофантових излагања и у њој се он углавном бави системима неодређених једначина, при чему је степен променљивих мањи или једнак 2, а број једначина увек већи или једнак 3.

У четвртој књизи разматрају се неодређене једначине трећег и четвртог степена, па чак и једна једначина шестог степена (IV_{18}).[113] У овој књизи Диофант свој метод за одређивање рационалних решења неодређених једначина облика $F_2(x, y) = 0$, преноси на једначине облика $F_3(x, y) = 0$. Интерпретирано језиком аналитичке геометрије Диофант у првом случају тражи тачке са рационалним координатама у којима права $y = кx$ (к је неки рационалан број) сече криву $F_2(x, y) = 0$, а у другом је додирује. У четвртој књизи Диофант за добијање рационалних тачака криве $F_3(x, y) = 0$ користи две сличне методе: ″метод сечице″ и ″метод тангенте″.[114]

111 Напомена: Слично би се добило и решавањем добијене једначине по z.
112 Напомена: Очигледно m и n морају бити узајамно прости и због y, m мора бити веће од n.
113 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 4, стр. 101.
114 Детаљније о томе Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 4, стр. 234-242.

Пета књига садржи најсложеније проблеме. На први поглед проблеми изгледају уобичајено, али ако се мало детаљније погледају поједини проблеми онда се тек може схватити њихова суштина. Такав је проблем (V_9).[115] У Диофантовој варијанти он гласи: ″Разложити јединицу на два разломка и додати сваком од њих дати број, тако да се добију квадрати″. Преведено на језик једначина, ако су тражени разломци x и y, а дати број a, онда је $x + y = 1$, $x + a = m^2$ и $y + a = n^2$. Ако се последње две једначине саберу, добија се $x + y + 2a = m^2 + n^2$: Како је $x + y = 1$, добија се $2a+1 = m^2 + n^2$.

Другим речима треба непаран број представити као збир квадрата два природна броја. И наравно да нема спора око Диофантове формулације проблема, већ у формулацији услова задатка. Диофант каже: ″Дати број не сме бити непаран и његова двострука вредност увећана за јединицу, не сме бити број дељив са простим бројем, који је после додавања јединице дељив са 4″.[116] Ми данас знамо да једначина $x^2 + y^2 = m$ нема решења ако је m облика $2^к(2n + 1)^2(4p+3)$, где су к, n и p ненегативни цели бројеви, што значи да број $2a + 1$ не сме бити број који је после издвајања квадрата дељив бар једним простим бројем облика $4k+3$. Међутим, у историји математике је било доста расправа баш око формулације тог услова (Б. Мезирјак, П. Ферма, К. Јакоби, П. Танери, ...) па су у помоћ позивани чак и филолози.[117]

Пета књига ″Аритметике″ је карактеристична и по томе што се у задацима од V_9 до V_{14}[118] Диофант бави представљањем природног броја у облику збира два, три, четири квадрата, који задовољавају неке услове (неједнакости). При решавању ових проблема Диофант примењује прецизан алгоритам који он назива ″метод приближавања″.[119] У оквиру тог метода Диофант се бави квадратним неједначинама и решава једначине облика $ax^2 + 1 = y^2$ (Пелове једначине).

У шестој књизи ″Аритметике ″Диофант се углавном бави правоуглим троугловима чији су мерни бројеви страница рационални бројеви, тј. таквом тројком рационалних бројева x, y, z која задовољава једначину $x^2 + y^2 = z^2$. Поред тог услова који је општи за све проблеме, он додаје услове који се односе на обим, површину, збир површине и страница итд.[120] Шеста књига је значајна и због тога што у њој Диофант у задацима (VI_{12}) и (VI_{15})[121] исказује три леме (две уз први и једну уз други проблем) везане за једначину облика $ax^2 + 1 = y^2$, тј. Пелову једначину, у којима доказује да дата једначина уколико има једно решење, има и бесконачно много решења.

Како је већ речено остале књиге Диофантове "Аритметике" нису сачуване и велико је питање шта су оне садржале?!

115 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 5, стр. 133-134.
116 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 5, стр. 133.
117 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 5, стр. 257-258.
118 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 5, стр. 133-138.
119 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 5, стр. 257-265.
120 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 6, стр. 150-167.
121 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – Књига 6, стр. 156.

4.3.4. ЗНАЧАЈ ДИОФАНТОВЕ ″АРИТМЕТИКЕ″

Ако се Диофантова ″Аритметика″ посматра као целовито дело, онда је она сигурно једно од најзначајнијих дела античке математичке мисли, али и, без неких великих претеривања, један од најзаначајнијих домета математичке науке уопште. Значај овог дела је у томе, што је оно својим садржајима, поред пионирских корака у увођењу математичке симболике, дало решења многих проблема, успоставило неке врло прецизне алгоритме и методе и отворило читав низ нових математичких проблема.

На плану решења проблема, суштина није само у прилично детаљним решењима свих 189 изложених проблема, већ у чињеници да решења највећег дела тих проблема, иако их је Диофант решавао са конкретним бројевима, представљају најопштије закључке – фундаментална тврђења у теорији бројева:

1. Сваки прост број облика 4к+1 може се представити у облику збира два квадрата (III_{19}; V_9).

2. Цео број n може се представити у облику збира два квадрата, ако он нема простих делилаца облика 4к+3 непарног степена (V_9).

3. Цео број n, који је производ два проста броја облика 4к + 1, може се на бар два начина представити као збира два квадрата. Квадрат таквог броја може се представити у облику збира два квадрата, бар на 4 различита начина (III_{19}).

4. Сваки природан број се може представити у облику збира квадрата четири рационална броја ($IV_{29\text{-}30}$; V_{14}).

5. Ниједан природан број облика 24к + 7 не може се представити у облику збира три квадрата (целих или рационалних бројева) (V_{11}).

У ″Аритметици″ Диофант показује да је доста дубоко ушао у суштину најзначајнијих Диофантових једначина: Питагорине, Пелове и Фермаове. Питагориној једначини и сложеним проблемима везаним за Питагорину једначину посвећен је један део шесте књига ″Аритметике″. У шестој књизи ″Аритметике″ је практично решена и Пелова једначина[122]. Диофант разматра специјалан случај, који се лако може уопштити. Коначно, шеста књига ″Аритметике″ је преко проблема правоуглог троугла чија је површина потпун квадрат[123] и била директна инспирација за Фермаов проблем.

Када је реч о алгоритмима и методама, онда је довољно рећи да је Диофантов метод параметара, један од најопштијих метода за решавање неодређених једначина. Диофант је овај метод користио у неколико варијаната, као један од најефикаснијих за добијање општих решења и доказивање да неки проблем има или нема решења, као и за успостављање критеријума о бесконачном скупу решења. Најзначајнији методи које Диофант користи су:

[122] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 297-298.
[123] Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 310-311.

1. Метод A[124]: Овај метод се у суштини своди на то да се при решавању неодређене једначине F_2 (x, y) = 0 у првом кораку одреди једно рационално решење: (x_0, y_0). Други корак је да се кроз тачку (x_0, y_0) конструише прамен (фамилија) правих $y - y_0 = к(x - x_0)$ (у параметарском облику $x = x_0 + t$, $y = y_0 + кt$, где је t рационална или целобројна променљива). За бесконачно много вредности к добија се бесконачно много пресечних тачака дате праве са кривом F_2 (x, y) = 0, тј, бесконачно много рационалних решења дате једначине. Број к је рационалан и Диофант је имао веома добра образложења за начин избора параметара уопште.

2. Метод B[125]: Једначину облика $y^2 = a^2x^2 + bx + c$, Диофант једноставном сменом $x = t$, $y = at + к$ (к је рационалан број) своди на линеарну једначину по t.

Израчунавањем се добија да је $t = \dfrac{c - k^2}{2ak - b}$ и у потпуности одређују решења у параметарском облику: $x = t = \dfrac{c - k^2}{2ak - b}$ и $y = at + к = \dfrac{a\left(c - k^2\right)}{2ak - b} + к$.

Број к је рационалан параметар који узима бесконачно много рационалних вредности и даје бесконачно много решења полазне једначине. Проблем је, наравно, значајно сложенији ако се траже целобројна решења.

3. Метод сечице[126]: Овај метод је у суштини сличан са методом A, само што се сада ради о неодређеној једначини трећег степена, дакле и о кривој трећег реда. Ако су позната два рационална решења неодређене једначине F_3 (x, y) = 0, на пример (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Кроз тачке A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) конструише се права која криву L дефинисану једначином F_3 (x, y) = 0 сече у тачки C(x_3, y_3), која ће такође имати рационалне координате.

4. Метод тангенте[127]: Ако је познато само једно решење неодређене једначине F_3 (x, y) = 0, на пример (x_1, y_1), онда се кроз тачку A (x_1, y_1), као додирну, конструише права која криву L дефинисану једначином F_3 (x, y) сече у тачки B(x_2, y_2).

5. Метод приближавања[128]: Овај метод који по идеји подсећа на метод приближног решавања једначина коришћењем сечице, Диофант користи за решавање Пелове једначине $26y^2 + 1 = x^2$. Међутим, као и сви Диофантови поступци и он се без проблема може генерализовати.[129]

---

124 Видети [4.37.] 1) Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 189.
2) Диофантов алгоритам за решавање линеарне Диофантове једначине ax + by = c

125 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 190.

126 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 238.

127 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 235.

128 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 258.

129 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 261.

На основу свега већ реченог јасно је да је Диофантова ″Аритметика″ капитално математичко дело, које ево већ пуних 18 векова инспирише математичаре на стваралаштво. Период присуства и утицаја Диофантове ″Аритметика″ условно се може поделити на период до и после 16. века, прецизније до 1621. и после 1621. године.

До 16. века Диофантовим радовима су се бавили арапски математичари, а њихова математичка знања и знања античке цивилизације у Европу стижу преко Византије, тако да европски математичари користе идеје и методе древних цивилизација, али немају додира са њиховим радовима.

Период ренесансе је у Европи значајно пробудио интересовање за уметничке и научне домете антике. У том периоду најзначајнија дела у области алгебре продукује Франсоа Виет[130], коме су очигледно веома добро били познати Диофантови радови, па према томе и његове идеје и методе.

Пуна афирмације Диофантове ″Аритметике″ настаје тек после Виета. Крајем 16. века, тачније 1572. године у познатој ″Алгебри″ чији је аутор Рафаел Бомбели[131] поменута су 143 Диофантова проблема. Три године касније, 1575. године, Ксиландром (Вилхем Холцман) је објавио први латински превод Диофантове ″Аритметике″.

Међутим, революционарни догађај се збио, већ поменуте 1621. године, када се појавио најпре грчки, а затим и савршени латински превод Диофантове ″Аритметике″ са тумачењима и коментарима, чији аутор је био француски математичар Гаспар Клод Баше де Мезирјак.[132] Ово де Мезирјаково издање Диофантове ″Аритметике″ постало је славно, јер је на маргинама једног од примерака који су му били доступни и које је пажљиво проучавао, своја теоријско-нумеричка запажања записао велики француски математичар Пјер Ферма.[133] Према руском преводу ″Аритметике″ (Москва 1974. године) који је са старогрчког учинио И. Н. Веселовски,[134] а чију редакцију је извршила и веома успеле коментаре припремила Изабела Григоровна Башмакова,[135] Ферма је на маргинама свог примерка Диофантове ″Аритметике″ записао чак 45 веома занимљивих коментара. То најбоље говори са колико је интересовања Ферма читао Диофантово дело и колико дубоко је проникао у Диофантове идеје и методе.

130 Франсоа Виет (Francois Viete 1540-1603. г.), француски правник и математичар кога сматрају оцем елементарне алгебре.

131 Рафаел Бомбели (Rafaello Bombelli 1526-1572. г.), познати италијански математичар и инжењер.

132 Баше де Мезирјак Гаспар Клод (1581-1638. г.), француски математичар и песник.

133 Пјер Ферма (Pierre de Fermat 1601-1665. г.), француски математичар и правник, аутор многих значајних математичких теорија и проблема

134 Преводилац је као допунски извор користио критичко издање Диофантове ″Аритметика″ Пола Таннерија из 1893. године

135 Изабела Григоровна Башмакова (1921- ?) – професор МГУ чији радови су усмерени на историју античке и националне математике је у коментарисању Диофантове ″Аритметике″ користила књигу Пола Таннерија ″Oeuvres de Fermat″ - Париз 1841. г.

Тешко је издвојити који је од Фермаових коментара био занимљивији, јер скоро сваки од њих је представљао или решење нечег што Диофант, Виет и де Мезирјак нису до краја решили, или ново тврђење, а веома често и уопштење неког од Диофантових проблема. Сигурно најзначајнији је други Фермаов коментар који се односи на задатак (II_8).[136] Тим коментаром је практично формулисан чувени велики Фермаов проблем.

Диофантовим радовима, али и Ферамовим радовима насталим после проучавања ″Аритметике″ бавили су се Ојлер, Јакоби и многи други математичари укључујући и оне који то и данас чине.

4.5. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА[137]

Друга неодређена једначина истраживана у прошлости свакако је једначина $x^2 – py^2 = 1$ (x и y целобројне промењиве, а p целобројна константа која није потпун квадрат), у математичкој литератури позната као Пелова једначина. Неки историчари математике сматрају да нема историјских оправдања да се дата једначина назива Пелова, јер постоји више оправдања да она буде Фермаова или Лагранжова.

Пелова једначина побуђује интересовање математичара још од античке Грчке. Еуклид је у својим ″Елементима″ (2. књига – одељак 9) показао како се налазе решења Пелове једначине за p = 2 полазећи од најмањег решења ка осталим.

У Архимедовом проблему Хелиосовог стада, после свођења осам једначина са 9 непознатих и додавањем два услова о потпуном квадрату и троугаоном броју добија се Пелова једначина $x^2 – 410\ 286\ 423\ 278\ 424 \cdot y^2 = 1$, чије најмање решење се записује помоћу 206 545 цифара.

У петој књизи ″Аритметике″ Диофант решава Пелове једначине за p = 26 и p = 30, а у шестој формулише три леме везане за Пелову једначину, које доказују да ако једначина поред тривијалног (x, y) = (1, 0) има још једно целобројно решење, онда има бесконачно много решења.

Брахмагупта[138] је у седмом веку знао да је $577^2 – 2\cdot 408^2 = 1$ и $1151^2 – 92\cdot 120^2 = 1$, а Бхаскара[139] је решио Пелову једначину за $p\in\{8, 11, 32, 61, 67\}$. За p = 61, он је нашао најмање решење x = 1 776 319 049; y = 226 153 980, а за p = 67 добио је x = 48 842; y = 5 967. Бхаскара је предложио и општи метод за решавање Пелових једначина, такозвани ″индијски или циклични метод″, помоћу кога је и решио једначину за p = 61.

У занимљивом писму,[140] које је 1657. године написао енглеским математичарима, својим савременицима, Ферма каже:

136 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974.– Фермаов коментар № II - стр. 197.
137 John Pell (1611-1685. г.), енглески математичар
138 Брахмагупта (598-660. г.), индијски математичар и астроном.
139 Бхаскара II (1114-1185. г.), индијски математичар и астроном.
140 Видети текст [4.37.] А. Спивак: Уравнение Пелля – ″Квант″, број 6/2002.

″Ако је дат произвољан природан број, који није квадрат, онда постоји бесконачно много таквих квадрата који када се помноже са датим бројем и добијени производ увећа за један дају квадрат″. Ферма даје и конкретне примере, а на крају писма пита: ″Питам да ли постоји опште правило решења проблема – када дати произвољан број, није квадрат. На пример, одредити такав квадрат, тако да производ тог квадрата и бројева 109, 149 или 433 увећан за 1, даје нови квадрат″. Ферма је написао да то може доказати. Као и већина његових радова, тај резултат није публикован, па се не зна да ли је Фермаов доказ исправан. С обзиром на Фермаово познавање Диофантове ″Аритметике″ и с обзиром да је у њој све спремно за уопштавање,[141] сигурно је да је он знао за рекурзивне формуле[142] које генеришу све решења. Да ли је знао и како се долази до најмањег нетривијалног решења, остаће вечна тајна.

Џон Валис[143] је први описао процедуру о којој говори Ферма, а која је различита од индијског цикличног метода, и добио решења сва три парцијална случаја. Валис ауторство тог решења приписује лорду Виљему Броункеру,[144] а већина историчара математике говори о ″енглеском методу″ решења Пелове једначине као њиховом заједничком раду. Међутим, они нису доказали да се процедура решавања једначине увек успешно завршава, а неки замерају да чак нису ни схватали да је то потребно доказати.

Неколико година по објављивању Валисових, односно Броункерових резултата, Ферма у писму Каркави поводом неких својих математичких открића, указује да су Енглези проблем решили само за парцијалне случајеве и да немају опште решење. Ферма примећује већ поменуте примедбе и тврди да би он могао дати потребан доказ примењујући свој метод бесконачног смањивања. Те речи наравно не значе и решење.

Ојлер[145] је користећи Брахмагуптине леме и идеје значајно побољшао Валисове и Броункерове резултате, којима је додао данас добро познате Ојлерове смене, које се користе не само за решавање неодређених једначина другог реда, него и за интеграцију ирационалних функција. Ојлер ипак није успео да докаже да ″енглески метод″ увек даје резултат, али се значајно примакао коначном решењу.[146] То је тек 110 година после Валисовог одговора на Фермаов изазов, пошло за руком Лагранжу,[147] који је 1766. искористио Ојлерове резултате и коначно у потпуности решио Пелову једначину.

---

141 Видети [4.37. Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 297.

142 Видети: Диофантово решење Пелове једначине – поглавље 7. овог рада

143 John Wallis (1616-1703. г.) – енглески математичар и један од оснивача Лондонског краљевског друштва

144 William Brouncker (1620-1684. г.) – енглески математичар и државник, први председник Лондонског краљевског друштва

145 Leonhard Euler (1707-1783. г.) – математичар, физичар, механичар и астроном, рођен у Швајцарској, а живео и радио у Русији, Неначкој ...

146 Ојлер је ове и друге своје радове објавио 1770. године у књизи ″Елементи алгебре″ коју је због поодмаклог слепила издиктирао. Књига је објављена на руском, немачком и француском језику.

147 Joseph Louis Lagrange (1736-1813. г.) – француски математичар и механичар – члан Париске, Берлинске и Петроградске АН

Лагранж своје радове везане за ову проблематику публикује 1771. године[148] и у њима строго доказује Ојлерова тврђења.

При крају 19. века познати немачки математичар и физичар Херман Минковски[149] разрадио је такозвану геометрију бројева у којој се методе геометрије користе за решавање задатака теорије бројева. Помоћу просторних решетки Минковском је пошло за руком да добије нове доказе многих познатих теорема, а између осталих и Пелове једначине.

Савремени историчари математике Ојлера оптужују да је неоправдано једначину $x^2 - py^2 = 1$ назвао Пеловом. Истина је, међутим, вероватно следећа. Ојлер је читајући Валисову ″Алгебру″ из 1658. године, очигледно направио омашку и због приличног Валисовог позивања у књизи на Пела и цитирања неких његових радова, разумео да су Валис и Броункер у својим радовима о једначини $x^2 - py^2 = 1$, користили неке Пелове резултате. Зато је још 1730. године, у својој 23. години, Ојлер први пут направио ту грешку, која је потом ушла 1770. године и у његове ″Елементе алгебре″. Како је Ојлер био најпопуларнији математички аутор свога времена та грешка је ушла у историју и данас је уобичајено да се једначина $x^2 - py^2 = 1$, оправдано или не, назива Пеловом. Међутим, математички чистунци који једначину $x^2 - py^2 = 1$ називају Фермаовом, мораће да признају да то данас ствара приличну забуну, јер се обично помисли на Фермаову једначину $x^n + y^n = z^n$.[150]

С друге стране нема доказа да је Ферма до краја разрешио сва спорна питања везана за једначину $x^2 - py^2 = 1$, па ако би се баш мерило по доприносу, онда би праведније било да једначина носи Лагранжово име. Било како било, данас је у свету за једначину $x^2 - py^2 = 1$ најраспрострањенији назив Пелова једначина.

4.6. ВЕЛИКА ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА

Већ је поменуто да је Диофант ширем кругу заинтересованих читалаца, пре свега математичара, постао доступан тек 1621. године, када је Фермаов пријатељ Баше де Мезирјак објавио латински превод Диофантове ″Аритметике″, која је убрзо постала обавезна лектира за све европске математичаре. Један примерак де Мезирјак је 1636. године поклонио Фермау, који је, као и Декарт, помно проучавао Диофантове идеје и методе.

Познато је да Ферма, који је важио за највећег аритметичара свог времена (вероватно и свих времена), за свога живота није објавио ни један рад. Сва његова открића садржана су у писмима које је размењивао са многим математичарима тог времена.

---

148 Видети [4.41.] Lagrange: Additionis to Euler's Elements of algebra (написано 1771. г.)

149 Herman Minkowsky (1864-1909. г.) – немачки математичар, физичар и филозоф који је објавио Геометрију бројева (1896.) и Диофантова приближавања (1907.)

150 На Интернету одредница Фермаова једначина у 99% случајева води на велику Фермаову теорему

Бојећи се да ће сав његов богати математички опус остати незабележен, Ферма је пред своју смрт почео да сакупља своје радове у чему му је помагао његов син Самуел. Резултат дугогодишњих Фермаових истраживања и Самуеловог мукотрпног петогодишњег сакупљачког рада објављен је пет година по Фермаовој смрти, 1670. године у Тулузу, када је приређено и специјално издање Диофантове ″Аритметике″, са свим Фермаовим коментарима и запажањима. [151]

Од 45 датих коментара, за историју математике свакако је најзначајнији Фермаов коментар № II у коме Ферма коментарише задатак II_8 из Диофантове ″Аритметике″ који се односи на опште решење Питагорине једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Поводом резултата који је добио Диофант, тј. чињенице да Питагорина једначина има бесконачно много целобројних решења, Ферма пише: ″Међутим, немогуће је куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и уопште никакав степен већи од квадрата, на два степена с истим таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ, но за њега су маргине ове књиге заиста мале″.[152]

Проблем који је овим коментаром поставио Ферма је знаменита Велика Фермаова теорема, која тврди да је једначина $x^n + y^n = z^n$ немогућа за целе позитивне вредности x, y и z, ако је природан број $n > 2$.

У Фермаовој заоставштини није пронађен доказ о коме је Ферма говорио, па је заувек остала законетка да ли је и каквим доказом заиста располагао Ферма. Чини се да математичари исто колико су желели да реше Фермаов проблем, толико су желели и да сазнају да ли је Фермаов доказ заиста постојао и да ли је био коректан или не.

Зато није ни чудо да је Ојлер 1742. године, дакле, скоро читав век после Фермаове смрти, замолио свог пријатеља, француског математичара Клероа [153] да поново претражи Фермаову кућу, у нади да ће наћи неки папир, бар са делом Фермаовог ″изванредног″ доказа (ако га је уопште и било). Напомињем да је и Гаус,[154] несумњиво један од најзаначјнихих математичара свих времена, о том питању имао две хипотезе: (1) или доказ није ни постојао; (2) или није био комплетан.

Међутим, независно од Гауса, Велика Фермаова теорема је заокупљала велику пажњу математичара у протекла четири века.[155] Елементарни доказ велике Фермаове теореме не постоји ни за један природан број n различит од 4.[156]

151 Видети [4.45.] Ратко Тошић: Пјер Ферма - Часопис ″Тангента″, број 4/24/2001, стр. 1-2.
152 Видети [4.37.] Диофант: Аритметика – Москва, 1974. – стр. 197.
153 Alexis Claude Clairaut (1713-1765. г.) – француски математичар и астроном
154 Karl Friedrich Gauss (1777-1855. г.) – немачки математичар и један од највећих светских математичара свих времена
155 Видети [4.44.] Ратко Тошић: Доказана је Велика Фермаова теорема? - Часопис ″Тангента″, број 1/1/1996) - стр. 47 – 48.
156 Доказ велике Фермаове теореме за n = 4 може се видети у поглављу 7. овог рада

Доказ велике Фермаове теореме за n = 3 извео је Ојлер још 1768. године, али је протекло преко сто година, када је Гаус доказао теоријске основе које је у свом доказу неосновано користио Ојлер.

Велика Фермаову теорему за n = 5 Лежен Дирихле[157] је у јулу 1825. годне изложио у Париској академији наука, а Лежандр[158] је у септембру 1825. године публиковао свој рад на исту тему. Свој доказ Дирихле је објавио 1828. године, али је он био веома сложен, и 1912. године га је значајно упростио Племељ.[159]

За следећи прост изложилац n = 7 доказ је извео Ламе[160] 1839. године. Ламеов доказ касније је прилично усавршио Лебег.[161]

Велики напредак у решавању велике Фермаове теореме учинио је познати немачки математичар Кумер[162] који је доказао да Фермаово тврђење важи за n ≤ 100. Он је чак 1843. године саопштио и комплетно решење проблема, али је Дирихле указао на грешку у његовом доказу.

Ламе је 1847. године објавио да му је пошло за руком да нађе доказ велике Фермаове теореме за све просте изложиоце n ≥ 3. Метод Ламеа представљао је веома усавршену варијанту Ојлерових идеја и заснивао се на аритметичким својствима бројева. Међутим, убрзо је Лиувил пронашао у Ламеовом доказу спорна места, чиме је оповргао његов доказ. Ламе је био присиљен да призна своју грешку.

И тако је тај Фермаов ″изванредни″ доказ скоро четири века мучио математичаре. Према Диксоновој ″Историји теорије бројева″, у немачком граду Дармштаду 1907. године умро је математичар Волфскел који је завештао суму од 100 000 марака аутору првог комплетног доказа велике Фермаове теореме. Навала ″аматера″, од којих многи нису схватили ни суштину проблема, на решавање велике Фермаове теореме је била толика да је у току три године Гетингенско математичко друштво примило преко хиљаду разних, наравно погрешних или непотпуних доказа. Хиперинфлација радова је спласнула тек када је, после 1. Светског рата, истинска хиперинфлација у Немачкој обезвредила почетни новчани фонд.[163]

У новије време, рачунарска ера је довела и до провере великог Фермаовог тврђења. Користећи идеје Кумера, Велика Фермаова теорема је осамдесетих година прошлог века, помоћу рачунара, доказана за све просте изложиоце n ≤ 150000.

157 Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859. г.), немачки математичар
158 Лежандр (Adrian Marie Legendre 1752-1833. г.), француски математичар
159 Јоспип Племељ (1873-1967. г.), словеначки математичар
160 Ламе (Lame Gabriell 1795 – 1870. г.), француски математичар
161 Лебег (Lebesque H.L. 1875-1941. г.), француски математичар
162 Кумер (Kummer E. E. 1810-1893. г.), немачки математичар
163 Видети [4.42.] - стр. 125.

Снажан развој компјутерске технологије је допринео да 1993. године Велика Фермаова теорема буде доказана за n ≤ 4 000 000, али то није решило Фермаов проблем у целини.

Енглески математичар Ендрју Вајлс[164] је 23. јуна 1993. године на математичкој конференцији о теорији бројева у Кембрицу приказао свој доказ Великог Фермаовог проблема. Презентација доказа, рекло би се, прошла је успешно, грешке у доказу нису примећене и нико није имао никавих негативних примедби. Сви су се сложили, да се десио историјски догађај: доказана је Велика Фермаова теорема. Међутим, само два месеца касније, неколико дана пре него што је текст Вајлсовог доказа, требало да крене у штампу, у њему је примећена извесна недоследност, мада су Вајлсови докази у целини били интересантни, елегантни и иноваторски.[165]

Вајлс је проанализирао ситуацију и схватио да је огроман, вишегодишњи труд пропао. На свом искуству је осетио да је ″од великог до смешног један корак″, јер су математичари са подсмехом гледали на оне који не успеју у решавању Фермаовог проблема. Уместо уласка у историју нашао се у екипи – самозваних ферматиста.[166] За њега, сериозног математичара и научника то је била трагедија и он је свој доказ желео да што пре заборави. Али само непуну годину касније, у септембру 1994. године, за време једног размишљања о ″уском грлу″ доказа, заједно са својим колегом Тејлором са Оксфорда, пала им је неочекивано на ум мисао да је настали проблем у доказу могуће превазићи.

Тада су они пробали да искористе неке већ доказане хипотезе теорије бројева и на тај начин реше спорно место у претходном решењу. Испоставило се да је то могуће и да се све у доказу сложило. Исправљена варијанта доказа дата је на проверу и после годину дана је објављено, да је у њој све апсолутно тачно, без иједне грешке.

У лето 1995. године у једном од престижних математичких часописа ″Математички анали″, публикован је потпун доказ Велике Фермаове теореме, који је запремио цео број часописа (више од 100 листова).

На тај начин, на крају 20. века, цео свет је признао, да је 360 година после свог настанка Велика Фермаова теорема, која је у суштини све то време била хипотеза, постала – доказана теорема. Ендју Вајлс је доказао Велику Фермаову теорему и ушао у историју.

Ипак, у историјату Велике Фермаове теореме, вероватно ће заувек остати тајна, да ли је доказ о коме је писао Ферма, био коректан или не?

---

[164] Ендрју Вајлс (Andew Wiles 1953-), енглески математичар

[165] Феликс Кирсанов: История великой теоремы Ферма (felix@orator.ru; http://www.orator.ru/)

[166] Ферматиста је погрдан термин формиран у другој половини 19. века којим су означавани математичари који су изложили некомплетне или погрешне доказе Фермаове теореме

4.6. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ И САВРЕМЕНА МАТЕМАТИКА

Велики немачки математичар Хилберт[167] је 1900. године на међународном математичком конгресу у Паризу формулисао 23 проблема чије је решавање значајно допринело развоју математичких наука у прошлом веку. Од велике важности за овај рад је 10. Хилбертов проблем – проблем решивости Диофантових једначина: *"За дату Диофантову једначину са било којим бројем непознатих величина и са рационалним целобројним коефицијентима измислити поступак којим се може одлучити (користећи коначан број операција) да ли та једначина има или нема целобројних решења"*.

Другим речима Хилберт се питао да ли постоји општи алгоритам помоћу којег се за Диофантову једначину одређене класе може рећи да ли она има целобројних решења.

Теоријске основе за решавање 10. Хилбертовог проблема у време његове формулације су биле оскудне. Међутим Гедел,[168] Черч,[169] а касније педесетих и шездесетих година Робинсон,[170] Дејвис[171] и Путнам[172] су својим радовима припремили 10. Хилбертов проблем за решење, да би га руски математичар Јуриј Матијашевич 1970. године дефинитивно негативно решио. Наиме, он је доказао да поступак за кога се Хилберт интересује у својим проблемима, не постоји".[173]

Негативан одговор на 10. Хилбертов проблем указује да је решавање Диофантових једначина прилично креативан посао који може значајно утицати на интелектуални и научни развој за математику обдарених младих људи. Зато и напори учињени у овом раду, а везани за изучавање историје појединих класа Диофантових једначина, метода за њихово решавање и методичких средстава за њихово приближавање ученицима, нису без разлога и без имликација на квалитетно и комплетно математичко образовање младих математичара.

167 Хилберт (David Hilbert 1862-1943. г.), немачки математичар
168 Гедел (Kurt Godel 1906-1978. г.), аустријски математичар
169 Черч (Alonzo Church 1903-1995. г.), амерички математичар
170 Робинсон (Julia Hall Bowman Robinson 1919 –1985. г.), америчка математичарка
171 Дејвис (Martin Davis. г.), амерички математичар
172 Путнам (Hilary Putnam 1926 -), америчка математичарка
173 Видети у [4. 36.] Жарко Мијаиловић: Доказ Матијашевичеве теореме (стр. 106 – 128)