"То, чиме су се у ранијим епохама бавили зрели умови научника данас је постало доступно разумевању обдарених младића."

Гедел

6. ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

Свака добра методичка разрада почива пре свега на добром познавању материје која се излаже. Зато је циљ овог дела рада, да што је могуће потпуније укаже на неке теоријске основе за реализацију наставног програма који је дефинисан у претходном поглављу.

6.1. ПОЈАМ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

"У једној земљи Далеког истока живео је некад један краљ, који је сваке ноћи узимао нову жену и следећег јутра наређивао да је погубе. После неког времена људи су постали смртно уплашени, јер је долазио ред и на њихове кћери да по једну ноћ буду краљице. Тада Шехерезада, кћер краљевог саветника, која је била мудра као и њен отац, замоли оца да и она постане краљева жена и да са собом као пратиљу поведе своју сестру. Њен отац је био запањен таквом молбом, али је знао да је његова кћер толико мудра да би могла учинити крај том страшном краљевом понашању. И тако се његова кћер Шехерезада венчала са краљем.

После вечере Шехерезда је замолила краља да се опрости са својом сестром. Када је Шехерезадина сестра ушла, затражила је да јој Шехерезада исприча једну од њених прелепих бајки. Шехерезада је почела да прича једну бајку, а када је завршила, краљ је био толико усхићен, да је хтео да чује још једну причу. Тако је Шехерезада из ноћи у ноћ – 1001 ноћ причала краљу по три или пет бајки. У међувремену је краљ заволео Шехерезаду, поштедео јој живот, а она му је подарила троје деце".

Тако су настале чувене бајке из хиљаду и једне ноћи, али и древни математички проблеми:

ПРИМЕР 1. *Колико би ноћи било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку ако би у току неких ноћи причала по 5 бајки, а у току осталих ноћи по 3 бајке?*

ПРИМЕР 2. *Колико највише, а колико најмање ноћи је било потребно Шехерезади да исприча 1001 бајку, причајући по 3, односно 5 бајки за једну ноћ?*

ПРИМЕР 3. *На колико различитих начина је Шехерезада могла да исприча 1001 бајку, уз услов да неких дана прича по 3, а неких дана по 5 бајки?*

Ако се број дана у којима је Шехерезада причала по 3 бајке означи са x, а број дана у којима је Шехерезада причала по 5 бајки са y, онда се проблеми 1, 2. и 3. могу моделирати једначином $3x + 5y = 1001$.

Очигледно је да су бројеви x и y ненегативни цели бројеви, јер број дана не може бити ни рационалан, ни негативан.

Решење проблема 1, 2. и 3. се тада своди на следећа питања:

1. Да ли је уопште могуће решити дату једначину и ако јесте како то урадити, а ако није, како доказати да једначина нема решења?

2. Одредити "најмање", односно "највеће" решење дате једначине?

3. Колико укупно решења има дата једначина?

Анализу заслужује и следећи проблем:

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Постоји ли квадар чији су мерни бројеви ивица цели бројеви, а дијагонала квадра је 65 cm?*

Ако се ивице тог квадра обележе са a, b и c, онда се коришћењем Питагорине теореме добија да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 65^2 = 4225$$

Опет је из услова задатка јасно да су тражени бројеви a, b и c природни, али се опет намећу и следећа питања:

1. Да ли такав квадар уопште постоји?
2. Ако постоји колике су његове ивице и како их израчунати?
3. Да ли постоји само један или више таквих квадара?

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Оловка кошта пола динара, гумица један динар, а свеска 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 предмета?*

Ако број оловки означи са x, број гумица са y и број свески са z, онда се добија следећи систем једначина:

$$x + y + z = 100$$

$$\frac{1}{2}x + y + 5z = 100.$$

*

Добијене једначине су примери Диофантових једначина.[200]

Дакле, алгебарске једначине или системи алгебарских једначина са рационалним коефицијентима чија решења припадају скупу целих (или рационалних) бројева, или неком од његових подскупова називају се алгебарским Диофантовим једначинама.

[200] Диофант Александријски је последњи велики антички математичар из 3. века нове ере, а први који се бавио једначинама са целобројним решењима.

Прва од наведених једначина је линеарна Диофантова једначина са две променљиве. Друга једначина је квадратна Диофантова једначина са три променљиве, а трећа је систем од две линеарне Диофантове једначине са три променљиве.

Обично се претпоставља да Диофантова једначина има две или више променљивих, а да систем Диофантових једначина има више непознатих него једначина.

Међутим, следећи примери ће показати егзистенцију и неких других врста Диофантових једначина и проблема:

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Одредити четири узастопна природна броја таква да је збир кубова прва три броја једнак четвртом.*

Очигледно се ради о једначини $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3$ која јесте Диофантова, али са једном променљивом.

<u>*ПРИМЕР 7.*</u> *Постоје ли природни бројеви x и y такви да је* $x^2 + 1 = 2^{y}$*?*

Дата једначина јесте Диофантова али није алгебарска, већ експоненцијална, јер је непозната у експоненту.

Уопштено, формулом $\Phi (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ целобројне (или рационалне) променљиве, n природан броји и Φ функција[201] датих променљивих, дефинисана је једна Диофантова једначина.

Домен ове Диофантове једначине је скуп Z^n (или Q^n ако се ради о рационалним променљивим).

Решење Диофантове једначине $\Phi (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, је свака уређена n – торка целих бројева $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ која задовољава једнакост: $\Phi (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Ако је $\alpha_1 = f_1 (p, q, r,...)$, $\alpha_2 = f_2 (p, q, r,...)$, …, $\alpha_n = f_n (p, q, r,...)$ (p, q, r,... су целобројни параметри), онда је $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ опште решење дате једначине.

<u>*ПРИМЕР 8.*</u> *Ако су x и y цели бројеви колико решења имају следеће једначине: a)* $x^2 + y^2 = 3$*; b)* $x^2 + y^2 = 5$*; c)* $x^2 + 2y = 24$*.*

Очигледно је да прва једначина нема целобројних решења, јер не постоје цели бројеви чији је збир квадрата 3.

Друга једначина има четири решења: (2, 1); (2, -1); (-2, 1); (-2, -1).

Како је у трећој једначини $x^2 = 24 – 2y = 2(12 – y)$, то x мора бити паран број, тј. x = 2к, где је к неки цео број. Тада је $4к^2 = 24 – 2y$, па је $y = 12 – к^2$.

[201] Најчешће је та функција алгебарска са рационалним коефицијентима, па се говори о алгебарским Диофантовим једначинама. Међутим, нису ретке ни експоненцијалне Диофантове једначине као и једначине које су задате формулом $\Phi (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, где је Φ нека сложена функција.

Формулама $x = 2к$, $y = 12 – 2к^2$ тада је дато опште решење једначине, и јасно је да за свако к из скупа целих бројева добијамо уређени пар $(x, y) = (2к, 12 – 2к^2)$ као решење једначине, што значи да једначина има бесконачно много решења.

Закључак је да Диофантове једначине могу бити без решења, а ако решења једначине постоје, онда их може бити коначно или бесконачно много.

На основу претходних разматрања очигледно је да су основна питања везана за Диофантове једначине:

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговори на ова питања су често веома тешки, што теорији Диофантових једначина даје веома велики значај и чини је једном од најинтересантнијих у елементарној математици. Строга систематизација метода за решавање Диофантових једначина сигурно не би била потпуна, јер се општи поступак може конструисати само за неке класе једначина.

Међутим, присутна је изузетно велика разноврсност идеја које се користе у разрешавању наведених питања. Зато ће се у редовима који следе покушати са систематским излагањем до сада познатих идеја за решавање Диофантових једначина чиме ће се проблематика решавања Диофантових једначина у извесној и могућој мери ипак на неки начин систематски посматрати.

6. 2. МЕТОД РАЗЛИКОВАЊА СЛУЧАЈЕВА[202]

Метод разликовања случајева је један од најексплоатисанијих метода за решавање математичких проблема. У теорији Диофантових једначина он није свемогућ, али је сигурно најчешће коришћен, било самостално, било у комбинацији са другим методама. Зато метод, пре извесног уопштавања, треба илустровати са неколико примера који се односе на Диофантове једначине.

[202] Детаљније о методу разликовања случајева видети у чланцима:
[6.87.] - 1) др Марица Д. Прешић: Метода доказивања разликовањем случајева – "Математика", бр 3/79, Загреб 1979.
[6.62.] - 2) Војислав Андрић: Решавање проблема методом разликовања случајева – "Математика", бр 3/81, Загреб 1981.

<u>*ПРИМЕР 9.*</u> *Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, тако да је* $p^2 + q = 101$. [203]

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја :

1) Ако је p = 2, онда је q = 99 – 4 = 97 $\in$ P.

2) Ако је $p \geq 3$, онда је p непаран број, па је $q = 101 - p^2$ паран број, што значи да је q = 2, јер је 2 једини паран прост број. Тада је $p^2 = 99$, па у овом случају нема решења.

Дакле, једино решења проблема је (2, 97). Δ[204]

<u>*ПРИМЕР 10.*</u> *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи једнакост* $xy^2 + 4 = 2000 \cdot y^2$.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је y = 0, онда је 4 = 0, па y = 0 није решење дате једначине;

2) Ако је $y \neq 0$, онда је $\frac{4}{y^2} = 2000 - x$. Како је 2000 – x цео број, то је и $\frac{4}{y^2}$ природан број. Закључак је да y мора бити делилац броја 4 и зато су могући једино случајеви:

2.1) Ако је y = 1, онда је x = 1996 ;

2.2) Ако је y = 2, онда је x = 1999 ;

Према томе једина решења су парови: (1996, 1) ; (1999, 2) Δ

<u>*ПРИМЕР 11.*</u> *Производ два двоцифрена броја у декадном систему је записан само помоћу четворки. Одредити чиниоце тог производа.*

РЕШЕЊЕ: Производ два двоцифрена броја увек је већи од 100, а мањи од 10000. Према томе тражени производ може бити или 444 или 4444.

1) Како је $444 = 4 \cdot 111 = 4 \cdot 3 \cdot 37$, то је једно решење $12 \cdot 37$.

2) Слично је $4444 = 4 \cdot 1111 = 4 \cdot 11 \cdot 101 = 44 \cdot 101$. Како је 101 прост број, то у овом случају не постоје таква два двоцифрена броја, броја, па проблем нема решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 12.*</u> *Доказати да не постоје цели бројеви x и y такви да је* $x^2 + y^2 = 2006$.

[203] Скуп природних бројева у раду је обележен са N, а скуп целих бројева са Z. Скуп простих бројева у раду је обележен са P, а скуп сложених бројева са S.

[204] Крај доказа теореме означен је увек са ◊, а крај решеног примера са Δ.

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2 и y^2 је 2006, дакле паран, па се разликују само два случаја, јер случај да су x и y различите парности није могућ, пошто би тада збир $x^2 + y^2$ био непаран:

1) Ако су бројеви x и y парни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је $x = 2к$ и $y = 2l$. Тада је $4к^2 + 4l^2 = 2006$. Како је лева страна једначине дељива са 4, а десна није (јер даје остатак 2), то једначина у овом случају нема решења.

2) У случају да су бројеви x и y непарни, онда постоје цели бројеви к и l такви да је $x = 2к+1$ и $y = 2l+1$. Тада је $4к^2 + 4к + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2006$, односно $4к^2 + 4к + 4l^2 + 4l = 2004$. Упрошћавањем једначине добија се $к(к + 1) + l(l + 1) = 501$. Како је са леве стране једначине увек паран број, а са десне непаран број, то једначина ни у овом случају нема решења. Δ

*

На основу изложених примера може се размотрити општији проблем:

Одредити скуп свих решења проблема P(x, y, z, …) где су x, y, z, … променљиве које егзистирају у оквиру датог проблема.

Нека је S непразан скуп који представља област дефинисаности датог проблема P (x, y,...).

Метод разликовања случајева заснива се на чињеници да се скуп S може поделити на коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова $S_1, S_2, \dots S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_к = S$ ($Si \cap Sj = \emptyset$; $i, j \in N$, за свако $i \neq j$), дакле таквих да они у потпуности прекривају скуп могућих решења S.

Метод разликовања случајева, решавање проблема P своди на решавање проблема P у сваком од скупова $S_1, S_2, \dots S_к$. Нека су $R_1, R_2, \dots R_к$ решења проблема P, у сваком од скупова $S_1, S_2, \dots S_к$ (при чему неки од њих могу бити и празни) Тада је решење R проблема P унија решења $R_1, R_2, \dots R_к$, тј. $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_к$.

То је можда дуготрајнији, али методолошки лакши посао, јер се скупови $S_1, S_2, \dots S_к$ могу бирати тако да решавање проблема P у њима буде што једноставније.

Метод разликовања случајева је погодан метода за решавање Диофантових једначина, али њену моћ не би требало прецењивати, јер и она попут других метода садржи извесну произвољност. Конкретно, поставља се питање: Како раздвојити случајеве?

Раздвајање случајева и јесте највећи проблем приликом примене овог метода, јер се не може унапред одредити како разбијати скуп S. Међутим, из приказаних примера и досадашњег разматрања, искуствено се могу формулисати следећи методолошки принципи:

1. При раздвајању случајева, скуп потенцијалних решења, тј. скуп S у потпуности се прекрива са коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова S_1, S_2, … $S_к$ таквих да је $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_к = S$ (принцип потпуности). На тај начин се избегава могућност да било које потенцијално решење буде изостављено.

2. За метод разликовања случајева од нарочитог значаја су случајеви:

(a) Када у одабраном подскупу S_i $(1 \le i \le k)$ дати проблем P нема ниједно решење, тј. $R_i = \varnothing$ и

(b) Када у одабраном подскупу S_j $(1 \le j \le k)$ дати проблем P увек има решења, тј. када је $R_j = S_j$.

Зато при разликовању случајева треба уочити што више подскупова који задовољавају услове (a) и (b) (принцип рационалности).

3. Приликом разликовања случајева и прекривања скупа потенцијалних решења дисјунктним подскуповима (кад год је то плодотворно) користити логична разбијања скупа могућих решења S. У теорији бројева најчешће се скуп целих бројева или неки његов подскуп, разбија : на парне и непарне; на негативне, нулу и позитивне; на класе еквиваленција по одређеном модулу, … (принцип природности).

4. Метод разликовања случајева заснива се на примени већ познатих математичких истина (Питагорине теореме, познатих неједнакости, …) које се као случајеви јављају у решавању проблема P (принцип примене).

Метод разликовања случајева није свемогућ, нити универзалан, али може бити веома користан у решавању проблема теорије бројева.

При том, принцип 2(a) је од нарочитог значаја, јер он служи за елиминацију случајева који немају реалан смисао, те се на тај начин скуп потенцијалних решења своди на неку од својих рестрикција. Ово је и примарно методолошко упутство које указује на први корак у раздвајању случајева, а он је свођење скупа могућих решења на што мање подскупова.

Метод разликовања случајева има успеха и у примени на решавање диофантских једначина.

Нека је дата Диофантова једначина са две променљиве $D(x, y) = 0$, где су x и y цели бројеви и нека је решење дате једначине скуп $R(x, y)$.

У претходном излагању је већ виђено да се метод разликовања случајева заснива на чињеници да се скуп целих бројева Z увек може поделити на коначно много дисјунктних, коначних или бесконачних подскупова Z_1, Z_2, … $Z_к$ таквих да је $Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_к = Z$, дакле таквих да у потпуности прекривају скуп целих бројева Z.

Ако једна од променљивих, на пример y, узима вредности c_1, c_2, … $c_к$, редом из скупова Z_1, Z_2, … $Z_к$, онда се решавање дате Диофантове једначине своди на решавање низа једначина $D(x, c_1) = 0$, $D(x, c_2) = 0$, … $D(x, c_к) = 0$.

То је можда дуготрајнији, али методолошки извеснији посао, јер се решавају једначине само са једном промењљивом x.

На тај начин се добија низ скупова решења $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$, … $R_к(x, y)$ добијеног низа једначина. Скуп решење дате једначине $R(x, y)$ тада је унија скупова решења добијеног низа једначина тј. $R(x, y) = R_1(x, y) \cup R_2(x, y) \cup \ldots \cup R_к(x, y)$.

У случају да се ради о Диофантовој једначини са више од две промењљиве раздвајање случајева се врши по једној од промењљивих, која је за то најподеснија, а онда се у оквиру сваког случаја разматрају нови случајеви, и све тако док се Диофантова једначина не сведе на решавање низа једначина са једном промењљивом.

Код решавања Диофантових једначина методом разликовања случајева најважније питање је како раздвојити случајеве?

Решавање проблема било којом методом па и методом разликовања случајева је пре свега, ипак ствар математичке интуиције, дара и талента, осећања за проблем. Али ни искуство није занемарљив фактор у приступу и решавању не само Диофантових једначина него и било којих других математичких садржаја. Зато интелигенција, таленат и рад представљају три равноправна фактора без којих је врхунски резултат у математичкој науци немогућ.

*

У наредним поглављима и примерима систематски се илуструје примена метода разликовања случајева и других поступака на решавање Диофантових једначина, по програму који је дат у претходном поглављу. Циљ ових илустрација је пре свега увид у теоријске основе за реализацију изложеног програма, што може бити значајна помоћ реализаторима програма.

6.3. МЕТОД АЛГЕБАРСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

У основној школи метод разликовања случајева је примењиван и на решавање Диофантових једначина, а за раздвајање случајева је коришћено неколико идеја:

Идеја парности се састоји у томе да се одреди (не)парност једне стране једнакости, а онда дискусијом утврди да ли и друга страна једнакости може или не може имати исту (не)парност, тј. да ли једначина има или нема решења. Идеја парности је специјалан случај идеје дељивости, која полази од утврђивања дељивости једне стране једнакости неким бројем, а потом се траже услови под којима ће и друга страна једнакости бити дељива истим бројем. Идеја последње цифре има такође сличан концепт, јер се испита последња цифра броја са једне стране једнакости, а затим утврди да ли је могуће или не (и под каквим условима) да број на другој страни једнакости има исту последњу цифру.

У наредним поглављима, на сличан начин, се у могућој мери систематизује решавање Диофантових једначина коришћењем алгебарских трансформација. Наиме алгебарске трансформације су средство којим се полазна Диофантова једначина доводи на еквивалентан облик погодан за дискусију, тј. за разликовање случајева. Како то конкретно изгледа и када се као средство користи производ, количник, збир, неједнакост, парност, дељивост или нешто друго, најбоље илуструју следећа поглавља.

6.3.1. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПРОИЗВОДА

Као инструмент за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина често се користи и производ. Први корак у решавању је трансформација бар једне стране једначине (зависно од случаја) у облик погодан за факторизацију како леве, тако и десне стране једнакости. Најповољнија ситуација је уколико се на једној страни једнакости израз који садржи промењљиве факторизује на чиниоце, а на другој страни једнакости факторизује константа. Примери који следе најбоље илуструју коришћење производа ради лакшег раздвајања случајева.

ПРИМЕР 13. *У скупу целих бројева решити једначину* $xy + 3y - 5x = 18$.

РЕШЕЊЕ: Једначина $xy + 3x - 5y = 18$ еквивалентна је са једначином $xy + 3y - 5x - 15 = 3$, односно $(x + 3)(y - 5) = 3$. Како је број 3 прост број, разликују се следеће могућности:

1) $x + 3 = 1, y - 5 = 3 \Rightarrow x = -2, y = 8$;
2) $x + 3 = -1, y - 5 = -3 \Rightarrow x = -4, y = 2$;
3) $x + 3 = 3, y - 5 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 6$;
4) $x + 3 = -3, y - 5 = -1 \Rightarrow x = -6, y = 4$. Δ

Производ се успешно користи нарочито у случајевима када једна од страна једнакости представља производ простих бројева, без обзира да ли се ради о константама или променљивим. Илустрација таквог једног случаја је следећи пример.

ПРИМЕР 14. *Одредити све просте бројеве p тако да је 2p + 1 седми степен неког природног броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени природни број n. Према условима задатка је $2p + 1 = n^7$, тј. $n^7 - 1 = (n - 1)(n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) = 2p$. Како су 1, 2, p и 2p једини чиниоци броја 2p, то су могући следећи случајеви:

1) Ако је $n - 1 = 1$, онда је $n = 2$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 2p = 127$, што није могуће, јер је 2p паран, а 127 непаран број ;

2) Ако је $n - 1 = 2$, онда је $n = 3$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1093 = p$. Како је 1093 прост број, то је уређени пар (3, 1093) једно решење проблема.

3) Ако је $n - 1 = p$, онда је $n = p + 1 \geq 3$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 \geq n + 1 \geq 3$, што значи да у овом случају нема решења.

4) Ако је $n - 1 = 2p$, онда је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = 1$, па је $n^6 + n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n = 0$. Претходна једначина има једина реална решења $n = 0$ или $n = -1$, па проблем опет нема решења, јер 0 и –1 нису природни бројеви. Δ

<u>ПРИМЕР 15.</u> Решити једначину $x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2$ у скупу целих бројева. [205]

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са једначином $(x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = y^2$. Множењем са 4 добија се $(2x^2 + 16x + 7 - 7)(2x^2 + 16x + 7 + 7) = 4y^2$, а даљом трансформацијом $(2x^2 + 16x + 7)^2 - 49 = 4y^2$, па је $(2x^2 + 16x + 7)^2 - (2y)^2 = 49$. Одавде се добија производ $(2x^2 + 16x + 7 - 2y)(2x^2 + 16x + 7 + 2y) = 49$. Разликују се следећи случајеви:

1) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 49$;

2) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 7$;

3) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = 49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = 1$;

4) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -1$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -49$;

5) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -7$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -7$;

6) $2x^2 + 16x + 7 - 2y = -49$ и $2x^2 + 16x + 7 + 2y = -1$.

Из добијених система једначина следе следећи системи квадратних, односно линеарних једначина:

- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x - 9 = 0$ и $y = 12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = 50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x - 9 = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = -48$ или $x^2 + 8x + 16 = 0$ и $y = -12$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -14$ и $4y = 0$ или $x^2 + 8x + 7 = 0$ и $y = 0$;
- $4x^2 + 32x + 14 = -50$ и $4y = 48$ или $x^2 + 8x + 16 = 0$ и $y = 12$.

Сва решења дате Диофантове једначине су: (-9, 12); (1, 12); (0, 0); (-8, 0); (-9, -12); (1, -12); (-4, -12); (-7, 0); (-1, 0); (-4, 12).

Последњи задатак показује како се алгебарским трансформацијама наизглед сложена једначина може довести до производа два израза, а потом његовом анализом до такорећи најелементарнијих система једначина.

---

[205] Проблем је са математичке олимпијаде у бившој ДДР. Видети [6.90] И.Н. Сергеева: Зарубежные математические олимпиады – Наука – Москва 1987.

6.3.2. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОЛИЧНИКА

Један од начина за раздвајање случајева је и коришћење количника и анализа његове целобројности. Идеја је да се једначина A = B, низом трансформација преведе у облик $M = N + \frac{P}{Q}$. Ако су M и N цели бројеви, онда то мора бити и $\frac{P}{Q}$, што значи да се Q мора садржати у P.

<u>*ПРИМЕР 16.*</u> *У скупу целих бројева решити једначину* $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$ трансформише у облик $x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x + 3)$, онда постоје две могућности:

1) Ако је $x = -3$, онда је $x^2 + 2x - 6 = -3$, а $y(x + 3) = 0$, па $x = -3$ није решење једначине ;

2) Ако је $x \neq -3$, онда је $y = \dfrac{x^2+2x-6}{x+3} = x - 1 - \dfrac{3}{x+3}$. Како y мора бити цео број разликују се следеће могућности:

2.1) $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2,\ y = -6$;

2.2) $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4,\ y = -2$;

2.3) $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0,\ y = -2$;

2.4) $x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6,\ y = -6$. Δ

<u>*ПРИМЕР 17.*</u> *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је p(x + y) = xy, при чему је p неки прост број.*

РЕШЕЊЕ: Из $p(x + y) = xy$ добија се $px = xy - py = y(x - p)$. Сада је јасно да су могућа два случаја:

1) Ако је $x = p$, онда је $p^2 = 0$, или $p = 0$, што није могуће ;

2) Ако је $x \neq p$, онда је $y = \dfrac{px}{x-p} = \dfrac{px - p^2 + p^2}{x-p} = p + \dfrac{p^2}{x-p}$. Да би број y био природан то p^2 мора бити дељиво са $x - p$, па се, с обзиром да је p прост број, разликују три могућности:

2.1) $x - p = 1 \Rightarrow x = p + 1,\ y = p^2 + p$;

2.2) $x - p = p \Rightarrow x = 2p,\ y = 2p$;

2.3) $x - p = p^2 \Rightarrow x = p^2 + p,\ y = p + 1$. Δ[206]

[206] Ученицима треба препоручити да све ове задатке реше и на други начин, јер оба претходна задатка се елегантно решавају и коришћењем производа

Ова једначина је била веома присутна на математичким такмичењима, додуше у форми одредити природне бројеве x и y чији је производ 2, 3, 5, 7,... p пута већи од њиховог збира. Интересантно за истраживање је колико решења има дати проблем за ма који природан број p (који не мора да буде прост).

<u>*ПРИМЕР 18.*</u> *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Из услова задатка се добија да је $10x + y = (x + y)^2$ или $9x + (x + y) = (x + y)^2$. Како је $x \neq 0$, то је и $(x + y) \neq 0$, па се деобом добијене једнакости са $(x + y)$ добија $\frac{9x}{x + y} + 1 = x + y$.

Ако је највећи заједнички делилац за x и y једнак d, онда постоје узајамно прости бројеви a и b такви да је $1 \leq x = ad \leq 9$ и $0 \leq y = bd \leq 9$. Тада једначина постаје $\frac{9ad}{(a + b)d} + 1 = (a + b)d$ или $\frac{9a}{a + b} + 1 = (a + b)d$. Како количник $\frac{9a}{a + b}$ мора бити природан број и ако су a и $(a + b)$ узајамно прости, то су могућа три случаја:

1) Ако је $a + b = 1$, онда је $9a + 1 = d$. Овај случај је немогућ, јер из $a + b = 1$ следује, због $x \neq 0$, да је $a = 1$, $b = 0$. У том случају је $d = 10$, што није могуће, јер је $d \leq 9$.

2) Ако је $a + b = 3$, онда је $3a + 1 = 3d$. И овај случај није могућ, јер добијена једначина нема целобројних решења.

3) Ако је $a + b = 9$, онда је $a + 1 = 9d$ или $a = 9d - 1$. Како је $1 \leq x \leq 9$, то је $1 \leq x = ad = (9d - 1)d \leq 9$, па је $d = 1$. То значи да је $a = 8$ и $b = 1$.

Дакле тражени број је 81 ($= (8 + 1)^2$).

6.3.3. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ЗБИРА

Један од начина за разликовање случајева при решавању Диофантових једначина је и анализа збира. Најчешће та анализа почива на трансформацији дате једначине у облик који је погодан за разматрање случајева. Један од најпогоднијих таквих облика је збир квадрата, или још општије, збир ненегативних сабирака.

<u>*ПРИМЕР 19.*</u> *У скупу целих бројева решити једначину* $x^4 + y^{2000} = 2x^2 - 1$.

РЕШЕЊЕ: Како је дата једначина $x^4 + y^{2000} = 2x^2 - 1$ еквивалентна са једначином $(x^2 - 1)^2 + (y^{1000})^2 = 0$ и како је збир квадрата два цела броја једнак 0 ако и само ако су оба броја једнака 0, то је могућ само један случај: $x^2 - 1 = 0$ и $y = 0$. Дакле, решења дате једначине су: (1, 0) или (-1, 0). Δ

<u>*ПРИМЕР 20.*</u> *Одредити све целе бројеве x и y тако да задовољавају једначину:* $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$.

РЕШЕЊЕ: Трансформацијом дате једначине $x^4 + y^4 = 6x^2 + 14y^2 - 53$ добија се њој еквивалентна једначина $(x^2 - 3)^2 + (y^2 - 7)^2 = 5$. Како је збир два квадрата једнак 5 само ако је један од њих 1, а други 4, разликују се следеће могућности:

1) $(x^2 - 3)^2 = 1$ и $(y^2 - 7)^2 = 4$. Дакле, $|x^2 - 3| = 1$ и $|y^2 - 7| = 2$. Како једначине $x^2 = 2$ и $y^2 = 5$ немају решења у скупу целих бројева то је $x^2 = 4$ и $y^2 = 9$, а тражена решења су уређени парови бројева $(x, y) \in \{ (2,3); (2, -3); (-2, 3); (-2, -3)\}$.

2) $(x^2 - 3)^2 = 4$ и $(y^2 - 7)^2 = 1$. Следи $|x^2 - 3| = 2$ или $|y^2 - 7| = 1$. Како једначине $y^2 = 8$ и $y^2 = 6$ немају решења у скупу целих бројева то једначина у овом случају нема целобројних решења. Δ

У оба претходна примера разликовање случајева је обављено трансформацијама једне стране дате једначине у збир квадрата које су биле релативно очигледне. У наредним примерима трансформације нису очигледне.

<u>*ПРИМЕР 21.*</u> *У скупу целих бројева решити једначину* $x^2 + xy + y^2 = 1$.

РЕШЕЊЕ: Ако се дата једначина помножи са 2 добија се еквивалентна једначина $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ или $x^2 + (x + y)^2 + y^2 = 2$. Збир квадрата три броја је једнак 2, ако су два од тих бројева по 1, а трећи 0, па се разликују три могућности:

1) $x^2 = 1$, $(x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 0$. Следи да је $y = 0$, а $x^2 = 1$, па су решења $(1, 0)$ или $(-1, 0)$.

2) $x^2 = 1$, $(x + y)^2 = 0$ и $y^2 = 1$. Како је $x + y = 0$, а $|x| = 1$ и $|y| = 1$, то су решења $(1, -1)$ или $(-1, 1)$.

3) $x^2 = 0$, $(x + y)^2 = 1$ и $y^2 = 1$. Следи да је $x = 0$, а $y^2 = 1$, па су решења $(0, 1)$ или $(0, -1)$.

Сва решења дате једначине су: $(1, 0); (-1, 0); (1, -1); (-1, 1); (0, 1); (0, -1)$. Δ

Трансформација дате Диофантове једначине у збир је плодотворно и код Диофантових проблема. Наредни пример то најбоље илуструје.

<u>*ПРИМЕР 22.*</u> *Одредити све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају остатак једнак збиру квадрата својих цифара.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{abc}$. Како је $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(9a + b) + a - b + c$, то је остатак при дељењу траженог броја са 11 једнак $a - b + c$. Према условима задатка је $a - b + c = a^2 + b^2 + c^2$, тј. $a^2 + b^2 + c^2 - a + b - c = 0$. Множењем добијене једнакости са 2 добија се $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a + 2b - 2c = 0$ или $a^2 + b^2 + c^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (c - 1)^2 = 3$.

Јасно је да једначина има решења ако су три од датих сабирака једнаки 0, а преостала три једнака 1. Како је $\overline{abc}$ троцифрен број, то је $a \geq 1$, па је $a = 1$. Слично је $b \geq 0$, па је $b + 1 \geq 1$ и због тога је $b = 0$ и $b + 1 = 1$. На основу тога је $a^2 + b^2 + c^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2 = 1 + 0 + c^2 + 0 + 1 + (c-1)^2 = 3$, па се разликују два случаја:

1) $c = 0$ и $(c-1)^2 = 1$.

2) $c = 1$ и $(c-1)^2 = 0$.

Тражени бројеви су очигледно 100 и 101. Δ

Дати проблем се може решити и другачијим разматрањем случајева, јер остатак при дељењу броја $\overline{abc}$ са 11 је $a^2 + b^2 + c^2$. Према томе $0 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 10$, што значи да је свака од цифара a, b и c мања или једнака 3, а збир квадрата све три цифре је мањи или једнак 10. Дакле у обзир долазе само бројеви: 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 130, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 300, 301 и 310. Провером се утврђује да услове задатка испуњавају само бројеви 100 и 101. Δ

6.3.4. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ НЕЈЕДНАКОСТИ

Често се као један од начина за раздвајање случајева употребљавају и неједнакости. Неједнакости се користе, како је већ у неким примерима приказано, да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. Потом се једначина, неким од већ изложених поступака, решава у преосталом делу области дефинисаности. Најбоље је при том, уколико је могуће, елиминисати бесконачни део области дефинисаности, а једначину потом решавати у коначном скупу.

ПРИМЕР 23. *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка тада је $\overline{ab} = 10a + b = a^3 + b^2$. Како је $\overline{ab} = 10a + b \leq 99$ то је и $a^3 + b^2 \leq 99$, па је $1 \leq a \leq 4$. Трансформацијом дате једначине добија се $10a - a^3 = b^2 - b$ или $a(10 - a^2) = b(b - 1)$. С обзиром да је $b(b - 1)$, као производ узастопних природних бројева, паран број, то је и $a(10 - a^2)$ паран број.

То значи да је и a паран број. Како је $a(10 - a^2) \geq 0$, то је $10 - a^2 \geq 0$, тј. $a \leq 3$. Једини парни број мањи или једнак 3 је $a = 2$. Тада је $a(10 - a^2) = b(b - 1) = 12$, што значи да је $b = 4$. Дакле, тражени број је 24 ($= 2^3 + 4^2$). Δ

У претходном примеру са две неједнакости, број случајева је са 90 сведен на само један, чиме је метод показао своју ефикасност. У наредном примеру приказаће се како се бесконачни скуп могућих решења, коришћењем неједнакости може свести на мали број могућих случајева.

<u>ПРИМЕР 24.</u> Постоје ли цели бројеви x и y такви да испуњавају једнакост $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

РЕШЕЊЕ: Пре него што се крене у процене леве, односно десне стране једначине, неопходно је трансформисати једначину у облик погодан за ефикасну анализу. Множењем једначине са 4 и додавањем броја 1 и на леву и на десну страну једначине добија се једнакост $4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$.

Следи да је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + 4y^3 + y^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1)$. Слично је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + y^2 + 4 + 4y^3 + 8y^2 + 4y - 5y^2 - 3 = (2y^2 + y + 2)^2 – 5y^2 – 3$.

Дакле, $(2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1) = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 2)^2 – (5y^2 + 3)$.

Сада се разликују две могућности:

1) Ако је $y = - 1$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2) Ако је $y \neq - 1$, онда је $(y + 1)(3y + 1) > 0$. Будући да је $5y^2 + 3 > 0$ за све $y \in Z$, то је $(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 2)^2$. Како између бројева $(2y^2 + y)^2$ и $(2y^2 + y + 2)^2$ постоји само један потпун квадрат и то је $(2y^2 + y + 1)^2$, следи да је $(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2$. Како је $(2x + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 = 4y^4 + y^2 + 1 + 4y^3 + 4y^2 + 2y + 1$, то је $y^2 – 2y = 0$, тј. y узима вредности 0 или 2:

2.1) Ако је $y = 0$, онда је $x^2 + x = 0$, па је $x = 0$ или $x = -1$.

2.2) Ако је $y = 2$, онда је $x^2 + x = 30$, па је $x = 5$ или $x = -6$.

Према томе сва решења дате једначине су: (0, -1); (-1, -1); (0, 0) ; (-1, 0) ; (5, 2) ; (-6, 2). Δ

<u>ПРИМЕР 25.</u> Постоје ли природни бројеви a, b, c, d такви да је $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$?

РЕШЕЊЕ: Не умањујући општост расуђивања, због симетричности једначине, може се претпоставити да је $1 < a \leq b \leq c \leq d$. Тада је $\frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{a^2}$, а то значи да је $\frac{4}{d^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1 \leq \frac{4}{a^2}$. Следи да је $a^2 \leq 4$, па је $a = 2$, јер не може бити 1. Сада је $\frac{3}{d^2} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{b^2}$. Закључак је $b^2 \leq 4$, тј. $b = 2$. Остаје $\frac{2}{d^2} \leq \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{2}{4} \leq \frac{2}{c^2}$, па је $c^2 \leq 4$, односно $c = 2$. Јасно је да је тада и $d = 2$, па је једино решење дате једначине $a = b = c = d = 2$. Δ

<u>*ПРИМЕР 26.*</u> *Постоје ли природни бројеви x, y, z такви да је x! + y! = z!?*

РЕШЕЊЕ: Како је $x! + y! = z!$ и како је $x! \geq 1$ и $y! \geq 1$, то је очигледно $x < z$ и $y < z$. Тада је $x! + y! = z! = z(z-1)...(y+1)y(y-1)...3\cdot2\cdot1 = z(z-1)...(y+1)\cdot y!$. Значи да је $x! = z(z-1)...(y+1)\cdot y! - y! = y!\,(z(z-1)...(y+1) - 1)$. Разликују се три случаја:

1) Ако је $x < y$, онда је и $x! < y!$, па једначина нема решења ;

2) Ако је $x = y$, онда је $z(z-1)...(y+1) - 1 = 1$, па је $z(z-1)...(y+1) = 2$ што значи да је $z = 2$. Тада је $x = y = 1$.

3) Ако је $x > y$, онда је $x \geq 2$ и $x! = x(x-1)...(y+1)\,y! = y!\,(z(z-1)...(y+1) - 1)$ па се после дељења са y! добија $x(x-1)...(y+1) = (z(z-1)...(y+1) - 1$. Како је лева страна увек парна, а десна непарна, једначина нема решења.

Према томе једино решење је $x = y = 1$ и $z = 2$. Δ

<u>*ПРИМЕР 27.*</u> *Једначину $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ решити у скупу природних бројева.*[207]

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $1 \leq x \leq y$, онда је дата једначина еквивалентна са $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Тада је $x^2 \leq xy \leq y^2$, па је $\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x^2}$. Сада је $\frac{3}{y^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1 \leq \frac{3}{x^2}$, па је очигледно $x^2 \leq 3$, што значи да је $x = 1$. Како је за $x = 1$, $y = -1$, то у овом случају нема решења.

2) Ако је $1 \leq y \leq x$, онда се аналогно доказује да једначина и у овом случају нема решења.[208]

*

Приметно је да решавање Диофантових једначина није методолошки искључив посао, јер се поред основне замисли увек користи још нешто, тј. свака идеја се комбинује са неком другом, а најчешће се као помоћни инструмент користи дељивост, као основна релација теорије бројева. Проблеми који следе, експлицитно користе дељивост као основну идеју за решавање Диофантових једначина.

[207] Дата једначина се може решити на више начина и управо овај проблем је искоришћен као пример за приказивање методичког модела РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА НА ВИШЕ НАЧИНА (видети поглавље 8. овог рада)

[208] Још материјала везаног за коришћење неједнакости садржи и радни материјал који је припремљен као илустрација за методички захват САМОСТАЛАН РАД УЧЕНИКА (поглавље 8. овог рада)

6.3.5. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ПАРНОСТИ

Коришћење парности је један од познатих и често примењиваних начина за решавање Диофантових једначина, не само зато што је разликовање парних и непарних целих бројева природно, него и зато што велики број тврђења даје алгоритам за (не)парност и зато што уочавање (не)парности најчешће елиминише читав један подскуп потенцијалних решења.

<u>ПРИМЕР 28.</u> Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 4y = 555...555$ (декадни запис броја 555...555 садржи тачно n петица).

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $n = 1$, онда је $x^2 + 4y = 5$, тј. $x = 1$, $y = 1$.

2) Ако је $n \geq 2$, онда x може бити паран или непаран број :

2.1) Ако је $x = 2к$ ($к \in N$), онда је $x^2 + 4y = 4к^2 + 4y = 4(к^2 + y) = 555...555$, па једначина нема решења.

2.2) Ако је $x = 2к + 1$ ($к \in N$), онда је $x^2 + 4y = 4к^2 + 4к + 1 + 4y = 555...555$, или $4к^2 + 4к + 4y = 4(к^2 + к + y) = 555...554$. Дакле, $2(к^2 + к + y) = 277...77$. Како је лева страна једначине паран, а десна непаран број, то једначина нема решења.

Према томе једино решење проблема је $x = y = n = 1$. Δ

<u>ПРИМЕР 29.</u> Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.[209]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Према условима задатка је $\overline{ab} = 10a + b = (a + b)^2$. Како је $10a + b = a + b + 9a = (a + b)^2$, то је $9a = (a + b)(a + b - 1)$. Како су $(a + b)$ и $(a + b - 1)$ узастопни природни бројеви то је њихов производ паран, па је 9a такође паран, што значи да је и a паран број. Зато се разликују следеће могућности:

1) $\overline{ab} = 25$, што није решење, јер је $25 \neq (2 + 5)^2 = 49$;

2) $\overline{ab} = 49$, није решење јер $49 \neq (4 + 9)^2 = 169$;

3) $\overline{ab} = 64$, такође није решење, јер је $64 \neq (6 + 4)^2 = 100$;

4) $\overline{ab} = 81$, што јесте решење, јер је $81 = (8 + 1)^2 = 9^2$. Δ

<u>ПРИМЕР 30.</u> Доказати да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$ нема решења у скупу целих бројева.

[209] Овај проблем је већ решаван, али сасвим другим методом (количника)

РЕШЕЊЕ: Збир бројева x^2, y^2, z^2 је 2007, дакле, непаран, па су или сва три броја непарна или су два парна, а трећи непаран и разликују се следећи случајеви:

1) Нека је $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ и $z = 2k + 1$ $(m, n, k \in Z)$. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2k + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007$. Следи да је $4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 4k(k + 1) = 2004$. Дељењем једнакости са 4 добија се $m(m + 1) + n(n + 1) + k(k + 1) = 501$. Како су бројеви $m(m + 1)$, $n(n + 1)$ и $k(k + 1)$ парни, то је и њихов збир паран, па једначина нема решења, јер је 501 непаран број.

2) Нека је $x = 2m$, $y = 2n$ и $z = 2k + 1$. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + (2k + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 2007$. Из добијене једнакости следи да је $4m^2 + 4n^2 + 4k(k + 1) = 2006$. Дељењем последње једнакости са 2 добија се да је $2m^2 + 2n^2 + 2k(k + 1) = 999$. С леве стране једнакости је паран, а са десне непаран број, па једначина ни у овом случају нема решења. ◊

<u>ПРИМЕР 31.</u> Решити једначину $x^2 + y^2 = 2^{1999}$ у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како је 2^{1999} паран број, онда су бројеви x^2 и y^2 исте парности, па постоје две могућности:

1) Бројеви x и y су непарни, тј. $x = 2m + 1$ и $y = 2n + 1$ $(m, n \in N)$. Тада је $x^2 + y^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 2^{1999}$. Следи да је $4m(m + 1) + 4n(n + 1) = 2^{1999} – 2 = 2(2^{1998} – 1)$, односно $2m(m + 1) + 2n(n + 1) = 2^{1998} – 1$. Како је лева страна једнакости паран број, а десна непаран број, у овом случају једначина нема целобројних решења.

2) Бројеви x и y су парни, тј. $x = 2^m a$ и $y = 2^n b$, где су a и b непарни природни бројеви, а m и n су природни бројеви мањи од 1000. Тада је $x^2 + y^2 = (2^m a)^2 + (2^n b)^2 = 2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{1999}$, па се разликују три могућности:

2.1) Ако је $m > n \geq 1$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2n}(2^{2m - 2n}a^2 + b^2) = 2^{1999}$. Следи да је $2^{2m - 2n}a^2 + b^2 = 2^{1999 - 2n.}$ Како је $(2^{2m - 2n}a^2 + b^2)$ непаран број, а $2^{1999 - 2n}$ паран број, то једначина нема решења.

2.2) Ако је $m = n$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2n}(a^2 + b^2) = 2^{1999}$, тј. $a^2 + b^2 = 2^{1999 - 2n}$. Како је $2^{1999 - 2n}$ паран број и непаран степен броја 2, то су евидентна два случаја:

2.2.1) Ако је $n \leq 998$, онда је $2^{1999 - 2n}$ је дељиво са 4. Како су бројеви a и b непарни, то $a^2 + b^2$ при дељењу са 4 даје остатак 2, па једначина нема решења.

2.2.2) Ако је $n = 999$, онда је $a^2 + b^2 = 2^{1999 - 1998} = 2$, па је $a = b = 1$, а $x = y = 2^{999.}$

2.3) Ако је $1 \leq m < n$, онда је $2^{2m}a^2 + 2^{2n}b^2 = 2^{2m}(a^2 + 2^{2n – 2m} b^2) = 2^{1999}$ или $a^2 + 2^{2n – 2m} b^2 = 2^{1999 – 2m.}$ Како је $(a^2 + 2^{2n-2m} b^2)$ непаран број, а $2^{1999 – 2m}$ паран број, то једначина нема решења.

Дакле једина решења дате једначине су $x = y = 2^{999}$. Δ

Поред (не)парности, дакле дељивости са 2, у решавању Диофантових једначина и проблема веома је присутно коришћење дељивост и са другим бројевима, помоћу које се такође, елегантно раздвајају случајеви.

6.3.6. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ОСОБИНА ДЕЉИВОСТИ

Једна од основних идеја за решавање Диофантових једначина почива на једноставној чињеници да ако је A = B, онда су и својства израза A и B у погледу дељивости идентична. На пример, ако је A израз који је дељив са 3, а при дељењу са 4 даје остатак 1, онда те особине мора имати и израз B.

Идеја је да се дата једначина A = B трансформише у еквивалентну једначину $A_к = B_к$ тако да један од израза $A_к$ или $B_к$ има јасно дефинисану дељивост.

<u>*ПРИМЕР 32.*</u> Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре десетица и куба цифре јединица.

РЕШЕЊЕ: Ако је тражени двоцифрени број $\overline{xy}$, онда је $10x + y = x^2 + y^3$. Еквивалентном трансформацијом се добија да је $10x - x^2 = x(10 - x) = y^3 - y = (y - 1)y(y + 1)$. Десна страна једначине представља производ три узастопна природна броја, па је увек дељива са 6, што значи да то мора бити и лева. Како су изрази x и (10 - x) исте парности x(10 - x) је дељиво са 6, ако је x = 6 или 10 - x = 6.

Ако је x = 4, онда је 24 = (y – 1)y(y + 1), па је y = 3, а тражени број $43 = 4^2 + 3^3$.

Ако је x = 6, онда је 24 = (y – 1)y(y + 1), па је y = 3, а тражени број $63 = 6^2 + 3^3$.

Веома интересантни су примери који третирају дељивост која није дата индиректно, него непосредно и директно.

<u>*ПРИМЕР 33.*</u> Одредити све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$. Тада је 10a + b = 9(a + b). То значи да је тражени број $\overline{ab}$ дељив са 9, па је и збир његових цифара дељив са 9. Јасно је да је тада a + b једнако 9 или 18, па је 10a + b једнако 9·9 = 81 или 9·18 = 162. Како је 162 троцифрен број, једино решење је 81 = 9 (8 + 1).

У претходним примерима коришћена је дељивост без остатка, што не мора бити увек пракса. Некада се до решења долази управо анализом остатка који приликом дељења неким бројем даје једна односно друга страна једнакости. Такав је био случај и са коришћењем последње цифре која представља остатак при дељењу са 10.

<u>*ПРИМЕР 34.*</u> Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је $x! + 5y = 6666$.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да број 6666 при дељењу са 5 даје остатак 1. Стога и број $x! + 5y$ при дељењу са 5 мора давати остатак 1. Како је $5y$ увек дељиво са 5, остаје да се види када је остатак при дељењу $x!$ са 5 једнак 1.

Зна се да је за $x \geq 5$ број $x!$ увек дељив са 5, па у обзир долазе вредности x мање од 5, дакле 1, 2, 3, 4. Како само $1! = 1$ и $3! = 6$ при дељењу са 5 дају остатак 1, то су тражена решења $5y = 6665$ или $5y = 6660$. Значи да су сва решења уређени парови: (1, 1333) ; (3, 1332). Δ

<u>*ПРИМЕР 35.*</u> *Одредити све троцифрене бројеве који су 11 пута већи од збира својих цифара..*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{xyz}$. Из услова задатка следи да је $100x + 10y + z = 11 (x + y + z)$. Како је десна страна једнакости дељива са 11, таква мора бити и лева па је тражени број дељив са 11, што значи да је $|x - y + z|$ дељиво са 11. Према томе постоје два случаја $|x - y + z| = 0$ или $|x - y + z| = 11$:

1) Ако је $|x - y + z| = 0$, онда је $y = x + z$. Ако се ова релација унесе у полазну једнакост, добија се $100x + 10x + 10z + z = 11 (x + x + z + z)$. После дељења са 11 добије се да је $10x + z = 2x + 2z$, односно $8x = z$, па је $x = 1$, $z = 8$, $y = 9$. Тражени број је 198.

2) Ако је $|x - y + z| = 11$, онда је $x - y + z = 11$, јер је цифра $0 \leq y \leq 9$. Тада је $x + z = 11 + y$. Како је $\overline{xyz} \leq 11 \cdot (9 + 9 + 9) = 11 \cdot 27 = 297$, то је $x \leq 2$. Како је $0 \leq z \leq 9$, то је $x + z \leq 11$ и једина могућност која долази у обзир јесте $x = 2$, $z = 9$, па је $y = 0$. Међутим, број 209 који се на тај начин добије не испуњава услове, јер је $209 \neq 121 = 11 \cdot 11$. Δ

6.3.7. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ КОНГРУЕНЦИЈА

У неким случајевима Диофантове једначине се веома елегантно решавају коришћењем конгруенција по модулу. Примери који следе показаће да се на овај начин многе Диофантове једначине и проблеми могу решити по скраћеном поступку.

<u>*ПРИМЕР 36.*</u> *Да ли постоје природни бројеви x, y, z и к такви да је* $x^2 + y^2 + z^2 = 8к - 1$?

РЕШЕЊЕ: Квадрати природних бројева конгруентни су са 0, 1 или 4 при дељењу са 8 (доказати). Тада је $x^2 + y^2 + z^2$ конгруентно са 0 (0+0+0), 1 (1+0+0), 2 (1+1+0), 3 (1+1+1), 4 (4+0+0), 5 (4+1+0), 6 (4+1+1). Како је десна страна једначине конгруентна са 7, тј. са – 1, а лева то никада није, то дата једначина нема решења ни за једно к.

Тиме је уједно, само на други начин, решен и пример 30, јер број 2007 управо има облик 8к-1. Δ

<u>*ПРИМЕР 37.*</u> *Одредити све ненегативне целе бројеве x и y ако је $2^x – 3^y = 7$.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $y = 0$, онда је $2^x = 8$, па је $x = 3$.

2) Ако је $y \geq 1$, онда је $2^x = 3^y + 7 \geq 10$, па је $x > 3$.

Како је $2^x = 3^y + 7$ и како је $2^x \equiv 0 \pmod 4$, то мора бити и $3^y + 7 \equiv 0 \pmod 4$, што значи да је $3^y \equiv 1 \pmod 4$, одакле је јасно да је y паран број, дакле $y = 2b$.

Слично је $3^y + 7 \equiv 1 \pmod 3$, па мора и бити и $2^x \equiv 1 \pmod 3$, што значи да је и x паран број, односно $x = 2a$.

Из једначине $2^{2a} – 3^{2b} = 7$, следи да је $(2^a + 3^b)(2^a - 3^b) = 7$. Сада је јасно да је $2^a + 3^b = 7$ и $2^a - 3^b = 1$. Решење добијеног система једначина очигледно је $2^a = 4$ и $3^b = 3$, па је $a = 2$ и $b = 1$, односно $x = 2a = 4$ и $y = 2b = 2$.

Једина решења дате једначине су, дакле (3, 0) и (4, 2). Δ

<u>*ПРИМЕР 38.*</u> *Да ли једначина $x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} + ... + x_{14}^{\ 4} = 1599$ има решења у скупу целих бројева?*

РЕШЕЊЕ: Ако је x природан број онда су могући остаци при дељењу броја x са 16 из скупа {0, 1, 2,..., 15}. Тада је $x^2 \equiv к \pmod{16}$ (к ∈{ 0, 1, 4, 9}. Из тога следи да је $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$ или $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Због тога збир $x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} + ... + x_{14}^{\ 4}$ при дељењу са 16 може дати било који остатак из скупа { 0, 1, 2,..., 13, 14}, али не и број 15. Како је $1599 \equiv 15 \pmod{16}$, то дата једначина нема решења у скупу целих бројева. Δ

6.3.8. РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ ДИСКРИМИНАНТЕ

Дискриминанта квадратне једначине често може помоћи да се квалитетно реши нека Диофантова једначина, чије би решавање на други начин било или немогуће или крајње нерационално.

<u>*ПРИМЕР 39.*</u> *Одредити све целе бројеве x и y такве да је $2x^2 + 5x + y^2 = 19$.*

РЕШЕЊЕ: Дата једначина се посматра као квадратна једначина по x, тј. као $2x^2 + 5x + (y^2 – 19) = 0$. Онда су њена решења: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 8(y^2 - 19)}}{4}$. Очигледно је да x може (али не мора) бити целобројно само ако је дискриманта ове квадратне једначине потпун квадрат. Другим речима, мора бити $25 – 8(y^2 – 19) = к^2$, где је к неки цео број, који такође треба одредити.

Дакле, $25 – 8y^2 + 152 = к^2$, па је $к^2 + 8y^2 = 177$. Како је $8y^2 \le 177$, то је $y^2 \le 4$, па је $|y| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Број к је цео број ако је $|y| = 1$ или $|y| = 4$. Тада је $|к| = 13$ или $|к| = 7$. Тако се сада сасвим лако добијају сва решења дате једначине: (2, 1) или (-3, 4), при чему су решења (1/2, 4) и (-9/2, 1) одбачена, јер нису целобројна. Δ

ПРИМЕР 40. *Једначину* $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ *решити у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је y = 0, онда је x = 0.

2) Ако је y = -1, онда је x = 1.

3) Ако је y = 1, онда је x = - 1.

4) Ако $y \notin \{-1, 0, 1\}$, онда је $(1 – y^2)x^2 + xy + y^2 = 0$. Потребан услов да добијена квадратна једначина има целобројно решење је да је њена дискриминанта потпун квадрат. Значи да $y^2 – 4(1 – y^2)y^2 = y^2 – 4y^2 + 4y^4 = 4y^4 – 3y^2 = y^2(4y^2 – 3)$ мора бити потпун квадрат, тј. или је y = 0 или је $4y^2 – 3 = к^2$. Следи да је $4y^2 – к^2 = 3$, па је $(2y + к)(2y – к) = 3$. Решавањем одговарајућих система једначина добијају се да је y = 1 или y = -1. Како $y \notin \{-1, 0, 1\}$, то у овом скупу једначина нема решења.

Дакле, једина решења једначине су: (0, 0); (1, -1); (-1, 1). Δ

ПРИМЕР 41. *Колико решења у скупу целих бројева има једначина* $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$? [210]

РЕШЕЊЕ: Факторизација се може извести на више начина. Једна могућност је да се на једној страни једнакости факторизује полином по y, а на другој полином по x. Конкретно, $y^4 - 1 = (y – 1)(y + 1)(y^2 + 1) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. С обзиром да није лако наслутити природу чинилаца ни једног ни другог полинома, тешко да се може направити нека рационална дискусија. Зато ваља покушати и на други начин.

Из $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$, следи $y^4 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x)(x^2 +3x + 2) + 1 = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 +3x + 1 + 1) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 – 1 + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$. Дакле, $y^4 - (x^2 + 3x + 1)^2 = 0$, односно $(y^2 - (x^2 + 3x + 1))(y^2 + (x^2 + 3x + 1)) = 0$. Према томе разликују се два случаја: $x^2 + 3x + 1 - y^2 = 0$ или $x^2 + 3x + 1 + y^2 = 0$.

210 Задатак је био на Савезном такмичењу младих математичара Југославије 1981. године у 2. разреду. Видети [6.84.]

Коришћењем дискриминанти добија се:

1) $к^2 = 9 – 4(1 - y^2) = к^2$ или $к^2 - 4y^2 = 5$. Следи да је $к^2 = 9$, а $y^2 = 1$.

2) $к^2 = 9 – 4(1 + y^2) = к^2$ или $к^2 + 4y^2 = 5$. Следи да је $к^2 = 1$, а $y^2 = 1$.

Решавањем конкретних квадратних једначина добија се да једначина има 8 решења: (0, 1); (0, -1); (-1, 1); (-1, -1); (-2, 1); (-2, -1); (-3, 1); (-3, -1). Δ

6.3.9. МЕТОД "НАЈМАЊЕГ" РЕШЕЊА

Метод минималног решења се често користи приликом налажења свих решења неких Диофантових једначина, односно доказивања да решења не постоје. Принцип је следећи:[211] " Претпоставимо да дата једначина има целобројна решења и да постоји алгоритам којим се из једног целобројног решења једначине добије друго целобројно решење. Ако једначина има целобројно решење, онда постоји решење које је минимално у неком смислу (нпр. минималан је збир $|x|+|y|$). Решење које се добија из тог решења није мање, па се тако добијају одређене особине тог минималног решења – оне су понекад довољне да закључимо да такво решење (и, дакле, ниједно друго) не постоји.

Друга формулација овог метода је следећа. Претпоставимо да постоји решење једначине у скупу природних бројева и да се може наћи алгоритам којим се из једног решења у скупу природних бројева добија друго решење у скупу природних бројева, али које је *строго* мање (у одређеном смислу) од полазног. То значи да постоји бесконачно много природних бројева мањих од датог природног броја, што је, наравно, немогуће. Дакле, дата једначина нема природних решења. У овом облику овај метод је у математичкој теорији познат као (Фермаов) метод бесконачног смањивања."

<u>ПРИМЕР 42.</u> Одредити сва целобројна решења једначине $x^2 + y^2 = 3z^2$.

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $x = y = z = 0$.

Претпоставимо да има и других решења. Нека је (x_o, y_o, z_o) оно решење дате једначине у скупу природних бројева за које промењљива $\alpha_o = |x_o|+|y_o|+ |z_o|$ има најмању могућу вредност. Из релације $x_o^2 + y_o^2 = 3z_o^2$ следи да су бројеви x_o и y_o дељиви са 3 (уколико би x_o или y_o били облика 3к + 1, или 3к – 1, онда би x_o^2 или y_o^2 при дељењу са 3 имали остатак 1, што значи да би збир $x_o^2 + y_o^2$ при дељењу са 3 имо остатак 1, или 2). Дакле $x_o = 3x_1$ и $y_o = 3y_1$. Тада је $x_o^2 + y_o^2 = 9(x_1^2 + y_1^2) = 3z_o^2$. Следи да је $3(x_1^2 + y_1^2) = z_o^2$, па је и z_o дељиво са 3, тј $z_o = 3z_1$. Сада је $3(x_1^2 + y_1^2) = 9z_1^2$, па је $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. То значи да је уређена тројка (x_1, y_1, z_1) такође решење дате једначине.

[211] Видети [6.87.] Владимир Мићић, Зоран Каделбург - стр. 53 – 54.

. Како је $\alpha_o = |x_o| + |y_o| + |z_o| = \alpha_o = |3x_1| + |3y_1| + |3z_1| = 3(|x_1| + |y_1| + |z_1|) = 3\alpha_1$, то следује да је $0 < \alpha_1 = \frac{\alpha_o}{3} < \alpha_o$. Противуречност која доказује да сем тривијалног решења, једначина нема других решења. Δ

<u>*ПРИМЕР 43.*</u> *Одредити сва целобројна решења једначине* $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $x = y = z = 0$. Докажимо да других решења нема.

Нека је (x_o, y_o, z_o) једно решење дате једначине у скупу природних бројева, тј. нека је $x_o^3 + 2y_o^3 = 4z_o^3$. Следи да је $x_o^3 = 4z_o^3 - 2y_o^3 = 2(2z_o^3 - y_o^3)$. То значи да x_o мора бити паран број, тј. $x_o = 2x_1$. Сада је очигледно $8x_1^3 = 4z_o^3 - 2y_o^3$. Дељењем са 2 добија се једначина $4x_1^3 = 2z_o^3 - y_o^3$ из које следи да је y_o такође паран број, тј $y_o = 2y_1$. Заменом $y_o = 2y_1$ следи да је $4x_1^3 = 2z_o^3 - 8y_1^3$. Ако се добијена једначина подели са 2 добије се $2x_1^3 = z_o^3 - 4y_1^3$. Из ове једначине следи да је z_o паран број, тј. $z_o = 2z_1$. Заменом у претходној једначини следи да је $2x_1^3 = 8z_1^3 - 4y_1^3$, а дељењем са 2 једначина постаје $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$. Из последње једначине је очигледно да је $(x_1 = \frac{x_o}{2}, y_1 = \frac{y_o}{2}, z_1 = \frac{z_o}{2})$ једно решење дате једначине. Ако се овај поступак настави добиће се да су решења дате једначине све тројке $(\frac{x_o}{2^к}, \frac{y_o}{2^к}, \frac{z_o}{2^к})$, јер је очигледно $\left(\frac{x_o}{2^к}\right)^2 + 2\left(\frac{y_o}{2^к}\right)^2 =$

$$= \frac{1}{2^{2к}}(x_o^2 + 2y_o^2) = \; = \frac{1}{2^{2к}}4z_o^2 = 4\left(\frac{z_o}{2^к}\right)^2$$

. Како таквих к има бесконачно много, а бројева који су мањи од x_o, y_o, z_o и дељиви са $2^к$, само коначно много, то је очигледно да је тривијално решење једино решење дате једначине. Δ

<u>*ПРИМЕР 44.*</u> *Одредити сва парове природних бројева x и y таквих да је* $x / (y^2 + 1)$ *и* $y / (x^2 + 1)$.

РЕШЕЊЕ: Из $x \mid (y^2 + 1)$ следи $px = y^2 + 1$ и из $y \mid (x^2 + 1)$ следи $qy = x^2 + 1$. Ако је $D(x, y) = d$, тада је $x = \alpha d$ и $y = \beta d$. Следи да је $p\alpha d = \beta^2 d^2 + 1$ и $q\beta d = \alpha^2 d^2 + 1$. Из добијених једнакости је $d(p\alpha - \beta^2 d) = 1$ и $d(q\beta - \alpha^2 d) = 1$, па је јасно да је $d = 1$, односно бројеви x и y су узајамно прости.

Како је $px \cdot qy = (y^2 + 1)(x^2 + 1) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$, то је очигледно да је услов задатка еквивалентан са $xy \mid x^2 + y^2 + 1$. Ако је $n = \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} > 2$, онда је $nxy = x^2 + y^2 + 1$, односно $x^2 - nyx + y^2 + 1 = 0$ (*). Нека је (x, y) једно решење једначине (*) у скупу природних бројева у коме је $x \geq y$ и x најмање могуће.

Ако се једначина (*) напише као квадратна једначина по x, онда се добија да је $f(x) = x^2 - nyx + y^2 + 1 = 0$. Како је $f(ny – x) = (ny – x)^2 - ny(ny – x) + y^2 +1 = n^2y^2 - 2nyx + x^2 - n^2y^2 + nyx + y^2 +1 = x^2 - nyx + y^2 +1 = 0$. Дакле, ако је (x, y) решење дате једначине (*), онда је и (ny – x, y) решење једначине (*).

Како је $ny – x > 0$ и како је x најмање могуће решење, то је $ny – x \geq x \geq y$. Квадратна функција f(x) је негативна у интервалу (x, ny – x), а ненегативна изван тог интервала. Према томе је $f(y) = y^2 - ny{\cdot}y + y^2 +1 = (2 – n)y^2 +1 \geq 0$. Ако је $x = y = 1$ најмање решење, онда је $3 - n \geq 0$, па је $n = 3$.

Како решење (x, y) генерише решење (ny – x, y), значи да решење (x, y) генерише решење (3y – x, y), па се од решења (1, 1) добија решење (2, 1), а од овога ново решење (5, 2), па затим (13, 5),... Дакле сва решења проблема су уређене двојке (F_{2n-1}, F_{2n+1}), где су $F_к$ чланови Фибоначијевог низа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...($F_1 = F_2 = 1$, $F_{к+2} = F_к + F_{к+1}$). Δ[212]

6.3.10. ДИОФАНТОВ МЕТОД

У другој књизи "Аритметике" Диофант Александријски даје општи метод за одређивање рационалних решења квадратне алгебарске једначине са две промењиве. Преведено на језик данашње математичке науке Диофантов метод се састоји у следећем:

Посматра се једначина $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (A, B, C, D, E, F су цели бројеви) која у xOy равни представља неку криву другог реда (или једну, односно две праве). Ако је (x_o, y_o) једно целобројно решење дате једначине, онда се кроз тачку (x_o, y_o) поставља прамен правих $y – y_o = к(x – x_o)$ (к је било који рационалан број различит од 0). За разне вредности рационалног параметра к, добија се бесконачно много тачака пресека правих и криве. Те тачке су рационалне.[213]

Конкретну примену Диофантовог метода илуструју следећи примери:

<u>*ПРИМЕР 45.*</u> *Решити једначину $3x^2 - y^2 = 26$ у скупу рационалних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Диофант је једначину праве користио у параметарском облику: $x = xo + t$; $y = yo + кt$. Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (3, 1)$, то је $x = 3 + t$; $y = 1 + кt$. Заменом у једначину добија се $3(3 + t)^2 – (1 + кt)^2 = 26$, а после трансформације $t (t (3 – к^2) + 18 – 2к) = 0$.

---

212 Дати пример и још неке примере могу се видети у [6.87.] - стр. 50-51.

213 Видети одговарајуће разматрање о Диофантовој "Аритметици" у поглављу 4. овог рада

Решења добијене једначине су $t = 0$ или $t = \dfrac{18 - 2к}{к^2 - 3}$. Ако је $t = 0$ добија се почетно решење, а ако је $t = \dfrac{18 - 2к}{к^2 - 3}$, онда је $x = \dfrac{3к^2 - 2к + 9}{к^2 - 3}$ и $y = \dfrac{18к - к^2 - 3}{к^2 - 3}$.

За к = 1, добија се целобројно решење (-5, -7), а за к = 2 решење је (17, 29). Ако се к напише као количник два цела броја, односно $к = \dfrac{m}{n}$ добија се двопараметарско решење: $x = \dfrac{3m^2 - 2mn + 9n^2}{m^2 - 3n^2}$ и $y = \dfrac{18mn - m^2 - 3n^2}{m^2 - 3n^2}$. Δ

<u>ПРИМЕР 46.</u> Решити једначину $x^2 - 2y^2 + 3xy + 4x - 5y + 3 = 0$ у скупу рационалних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (1, 0)$, то је $x = 1 + t$; $y = кt$. Заменом у једначину добија се $(1 + t)^2 - 2(кt)^2 + 3(1 + t)\, кt - 4(1 + t) + 5кt + 3 = 0$. После трансформације се добија да је $t\,(\,t\,(1 - 2к^2 + 3к) + 8к - 2) = 0$. Решења добијене једначине су $t = 0$ или $t = \dfrac{8к - 2}{2к^2 - 3к - 1}$. Тада су решења дате једначине $x = \dfrac{2к^2 + 5к - 3}{2к^2 - 3к - 1}$ и $y = \dfrac{8к^2 - 2к}{2к^2 - 3к - 1}$. Δ

Диофантовим методом се могу решити и сложеније једначине. На пример неке квадратне једначине са три променљиве. [214]

<u>ПРИМЕР 47.</u> Решити једначину $19a^2 + 5b^2 = c^2$ у скупу рационалних бројева.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $c = 0$, онда једначина има тривијално решење $a = b = c = 0$.

2) Ако је $c \neq 0$, онда се може увести смена $x = \dfrac{a}{c}$ и $y = \dfrac{b}{c}$ којом се једначина трансформише у једначину $19x^2 + 5y^2 = 1$. Како је једно решење дате једначине $(x_o, y_o) = \left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ то се трансформацијама $x = \dfrac{1}{8} + t$ и $y = \dfrac{3}{8} + кt$ и елиминацијама које следе, добија $t = \dfrac{-(15к + 19)}{4(5к^2 + 19)}$.

---

[214] Шире теоријске основе и још неке примере видети у [6.87.] - стр. 50-51.

Ако се добијена вредност уврсти у трансформационе формуле добија се $x = \dfrac{5к^2 - 30к - 19}{8(5к^2 + 19)}$ и $y = \dfrac{-15к^2 - 38к + 57}{8(5к^2 + 19)}$. Враћањем на почетну једначину добија се $a = \alpha(5к^2 - 30к - 19)$; $b = \alpha(-15к^2 - 38к + 57)$ $c = 8\alpha(5к^2 + 19)$, где је α фактор пропорционалности. Ове формуле за целобројно к генеришу целобројна решења дате једначине. Ако се к замени рационалним бројем $к = \dfrac{m}{n}$ добијају се двопараметарска решења дате једначине: $a = \alpha\dfrac{5m^2 - 30mn - 19n^2}{n^2}$; $b = \alpha\dfrac{-15m^2 - 38mn + 57n^2}{n^2}$ и $c = 8\alpha\dfrac{5m^2 + 19n^2}{n^2}$. Δ

6.3.11. ПРИМЕНА МЕТОДА АЛГЕБАРСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА У РЕШАВАЊУ ДИОФАНТОВИХ ПРОБЛЕМА

Метод алгебарских трансформација веома успешно се може применити на многе практичне проблеме. Примери који следе најбоље илуструју неке од могућих примена.

ПРИМЕР 48. *Доказати да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n.*

РЕШЕЊЕ: Како је $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2(n^2 + 2n + 1) + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + 2n + 1)(n^2 + 1) = (n + 1)^2 (n^2 + 1)$, то је добијени број потпун квадрат само ако је $n^2 + 1$ потпун квадрат, то јест $n^2 + 1 = a^2$. Тада је $a^2 - n^2 = 1$, тј. $(a - n)(a + n) = 1$. Следи да је $a - n = a + n = 1$, одакле је $a = 1$ и $n = 0$, што није могуће, јер $n = 0$ није природан број. Δ

ПРИМЕР 49. *Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О ком броју је реч? Колико има решења?*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Тада је очигледно $10x + y + 10y + x = 11(x + y) = к^2$ или $x + y = \dfrac{k^2}{11} \leq 18$. Како је x + y природан број то је број $к^2$ дељив са 11 и уз то $к^2 < 198$. Значи да је $к^2 = 121$, па је к = 11. Тада је x + y = 11, па су сва решења датог проблема бројеви: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92. Δ

ПРИМЕР 50. *Одредити све уређене тројке (x, y, z) природних бројева x, y и z, таквих да је $xy + yz + zx - xyz = 2$.*

РЕШЕЊЕ: Примећује се да је једначина симетрична па се разматрање може извести по једној променљивој, на пример x. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 1$, онда једначина постаје $y + yz + z - yz = y + z = 2$, па је (1, 1, 1) једно решење једначине.

2) Ако је $x = 2$, онда је $2y + yz + 2z - 2yz = 2y - yz + 2z = 2$. Следи да је $yz - 2y - 2z + 4 = (y - 2)(z - 2) = 2$, а то значи да постоје два решења: $y - 2 = 1, z - 2 = 2$ или $y - 2 = 2$, $z - 2 = 1$. Дакле могућа решења су (2, 3, 4) ; (2, 4, 3) ; (3, 2, 4) ; (3, 4, 2) ; (4, 2, 3) ; (4, 3, 2).

3) Ако је $x > 2$, $y > 2$ и $z > 2$, онда важе неједнакости: $xyz \geq 3xy$, $xyz \geq 3yz$ и $xyz \geq 3zx$. Сабирањем ових неједнакости добија се да је $3xyz \geq 3xy + 3yz + 3zx$, па је $xyz \geq xy + yz + zx$ или $2 = xy + yz + zx - xyz \leq 0$, што је немогуће. Δ

<u>*ПРИМЕР 51.*</u> *Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени троцифрени бројеви x и y. Тада због услова задатка важи једнакост: $1000x + y = 3xy$. Одавде је $9xy - 3y - 3000x + 1000 = 1000$ или $3y(3x - 1) - 1000(3x - 1) = (3x - 1)(3y - 1000) = 1000$. Како је x троцифрен број, то је $x \geq 100$, па је $3x \geq 300$, а $3x - 1 \geq 299$. Како су делиоци броја 1000 већи од 299 само бројеви 1000 и 500, то постоје само две могућности:

1) $3x - 1 = 1000$, или $3x = 1001$, што није могуће, јер 1001 није дељиво са 3.

2) $3x - 1 = 500$, или $3x = 501$, а $x = 167$. Тада је $3y - 1000 = 2$, па је $y = 334$. Тражено множење је $3 \cdot 167 \cdot 334 = 167334$. Δ

<u>*ПРИМЕР 52.*</u> *Одредити све природне бројеве чија је вредност једнака збиру квадрата његових цифара у децималном запису.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је тражени број једноцифрени број x, онда је $x = x^2$, па је $x = 1$.

2) Уколико је тражени број двоцифрен онда је $10x + y = x^2 + y^2$, што је еквивалентно са $x(10 - x) = y(y - 1)$. Како је $y(y - 1)$ паран број, то је и x парна цифра. За $x \in \{2, 4, 6, 8\}$ број $x(10 - x)$ је једнак или 18 или 24, а они очигледно не представљају производ два узастопна природна броја.

3) Ако је тражени број троцифрен, онда је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$. Како је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \cdot 81 = 243$, то је $x = 1$ или $x = 2$.

3.1) Ако је $x = 1$, онда је $100 + 10y + z = 1 + y^2 + z^2$ или после сређивања $99 + 10y + z = y^2 + z^2$. Како је $99 > z^2$ и $10y > y^2$, то је лева страна увек већа од десне па једначина нема решења.

3.2) Ако је $x = 2$, онда је $200 + 10y + z = 4 + y^2 + z^2$. Лева страна једнакости је увек већа од 200, а десна увек мања од 200, па једначина нема решења.

4) Уколико је број цифара већи од 3 и једнак к, онда је тражени број увек већи од $10^{к-1,}$ а збир квадрата његових цифара мањи од 100к, па је једнакост могућа само ако је $10^{к-1} \leq 100к$, или $10^{к-3} \leq к$, што је немогуће, јер добијена неједнакост не важи ни за једно к веће од 3. Δ

<u>*ПРИМЕР 53.*</u> *Одредити све природне бројеве x такве да је $2^x + 1$ квадрат природног броја.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $2^x + 1 = y^2$, онда је $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1) = 2^x$. Једини чиниоци броја 2^x су степени броја 2. Нека је $2^x = 2^a \cdot 2^b$ $(a \geq b)$, где је $a + b = x$. Тада је $y + 1= 2^a$ и $y - 1 = 2^b$, па је $2^a - 2^b = 2$. Следи да је $2^b(2^{a-b} - 1) = 2$. Јасно је да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} - 1 = 1$, па је $b = 1$ и $a - b = 1$. Дакле $a = 2$, $b = 1$ и $x = a + b = 3$. Према томе је $2^3 + 1 = 9 = 3^2$, па је $y = 3$. Δ