> *"Математику може добро предавати само*
> *онај човек који је њом одушевљен и који је*
> *прихвата као активну науку која се развија".*
>
> *А.Н. Колмогоров*

7. МЕТОДИЧКА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Теориске основе дате у претходном поглављу су предуслов за успешну методичку трансформацију садржаја о Диофантовим једначинама у средњој школи. Циљ методичке трансформације је да се садржаји о Диофантовим једначинама припреме за директну примену у настави. Дакле, у овом поглављу се из обиља материјала који су погодни за рад са обдаренима издвају најпогоднији и прилагођавају наставним условима у смислу могућих дефиниција, теорема, примера, примене ... и редоследа излагања, без претензија да се они и методички моделирају у смислу директних наставних сценарија.[215]

7.1. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Једначина која садржи само једну променљиву за коју се поставља услов да је целобројна је Диофантова једначина једне променљиве.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одредити све целе бројеве за које је $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 14 = 0$.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $x = 0$, онда једначина нема решења, јер је $14 \neq 0$.

2) Ако је $x \neq 0$, онда дељењем са x дата једначина се трансформише у следећу: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + \frac{14}{x} = 0$. Како је x цео број и како је десна страна једнакости цео број, то мора бити и лева, а то значи да израз $\frac{14}{x}$ мора бити цео број. Дакле број x мора припадати скупу целобројних делилаца броја 14, па је $x \in \{ -14, -7, -2, -1, 1, 2. 7, 14\}$. Провером се добија да је једино $x = 2$ задовољава дату једначину. Δ

Проблем се може коришћењем идентичне идеје уопштити на било коју Диофантову једначину једне променљиве која је дата у облику полинома.[216]

---

[215] Методичком моделирању појединих садржаја посвећено је цело 9. поглавље Методички модели наставе Диофантових једначина

[216] Viet (1540-1603) је у својим радовима доказао опшу теорему и објаснио алгоритам за одређивање рационалних нула полинома с целобројним коефицијентима. Детаљније Видети [7.106.] - стр. 113-116

ТЕОРЕМА 1. *Ако је x_o целобројна нула полинома $P(x) = a_nx^n + ... +a_1x + a_o$ са целобројним коефицијентима, онда је x_o један од целобројних делилаца броја a_o.*

ПРИМЕР 2. *Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени цео број к. Тада је $к^3 + (к + 1)^3 + (к + 2)^3 = (к + 3)^3$. Сређивањем добијене једначине добија се $к^3 – 6к - 9 = 0$.[217]

Трансформацијом израза $к^3 – 6к – 9 = к^3 – 27 – 6к + 18 = (к – 3)(к^2 + 3к + 9) – 6(к – 3) = (к – 3)(к^2 + 3к + 3)$, добија се као једино решење број к = 3, јер једначина $к^2 + 3к + 3$ нема целобројних решења. Према томе тражена релација је $3^3+4^3+5^3 = 6^3$.Δ[218]

ПРИМЕР 3. *Може ли збир кубова првих n узастопних природних бројева бити a) 1 234 567; b) 29 506 624?*

РЕШЕЊЕ: а) Познато је да је је $1^3 + 2^3 + (n - 1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Дакле, збир кубова првих n узастопних бројева је потпун квадрат. Како број 1 234 567 није потпун квадрат, јер се ниједан квадрат не завршава цифром 7, одговор је негативан.

b) Ако је $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ = 29 506 624, онда је $\frac{n(n+1)}{2}$ = 5432. Тада је производ n(n + 1) = 10 864, а то није могуће, јер се производ два узастопна цела броја завршава цифрама 0, 2 или 6 и никада не завршава цифром 4. Δ

ПРИМЕР 4. *Одредити све просте бројеве p такве да је $p^2 + 2^p = 177$.*

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да су функције $y = p^2$ и $y = 2^p$ растуће, па је и цео израз $p^2 + 2^p$ растући. Како је p непаран број и $2^p < 177 < 256 = 2^8$, то је p < 8. Дакле, p је 3, 5 или 7. Провером се лако добија да је p = 7, јер је $2^p + p^2 = 49 + 128 = 177$. Δ

ПРИМЕР 5. *Збир квадрата првих n природних бројева је 4900. Колико је бројева сабрано?*

РЕШЕЊЕ: Како је $1^2 + 2^2 + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n + 1)}{6} = 4900$, то је производ $n(n+1)(2n + 1) = 6 \cdot 4900 = 6 \cdot 100 \cdot 49 = 6 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 49 = 24 \cdot 25 \cdot 49$. Очигледно је n = 24. Δ

---

[217] И ова једначина се може решити коришћењем теореме о рационалним нулама полинома.

[218] Видети пример 7. у претходном поглављу.

Занимљиво је да је збир квадрата првих 24 природна броја потпун квадрат броја 70.. Поставља се питање да ли таквих случајева има и касније, тј. постоји ли још неки природан број n такав да је $1^2 + 2^2 + (n - 1)^2 + n^2 = к^2$? И, наравно, ако постоји, да ли таквих случајева има коначно или бесконачно много?[219]

7.2. ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $ax + by = c$

Ако су a, b и c цели бројеви и $ab \neq 0$, линеарна једначина $ax + by = c$, при чему су x и y цели бројеви, назива се линеарна Диофантова једначина.

Очигледно је да се свака линеарна једначина са две променљиве и целобројним коефицијентима може свести на једначину облика $ax + by = c$.

Већ је речено је да су основна питања везана за сваку Диофантову једначину:

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења;
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

Одговоре на ова питања, када је реч о линеарној Диофантовој једначини са две променљиве, дају следећи примери и теореме, при чему ће нека питања и проблеми бити третирани на више начина, као на пример, сам алгоритам за решавање линеарне Диофантове једначине.

7.2.1. ДА ЛИ ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА УВЕК ИМА РЕШЕЊЕ?

<u>ПРИМЕР 6.</u> *Имају ли једначине* $x + y = 2006$ *и* $2x + 10y = 2005$ *решења у скупу целих бројева?*

РЕШЕЊЕ: Прва једначина очигледно има бесконачно много решења, јер је уређени пар $(x_0, 2006 - x_0)$, где је x_0 било који цео број, опште целобројно решење дате једначине.

---

[219] О овом проблему ће бити још речи у поглављу о Пеловој једначини.

Друга једначина нема решења јер је за ма који пар целих бројева (x, y) на десној страна једначине непаран број, а на левој паран број.

Прецизан алгоритам за одређивање да ли једначина $ax + by = c$ има или нема решења је директна последица следеће теореме.

<u>*ТЕОРЕМА 2.*</u> *Потребан и довољан услов да линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има решење је да је број c дељив са NZD (a, b).*

ДОКАЗ: Нека је NZD (a,b) = d ($d \neq 1$).

Ako je (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$. Тада постоје узајамно прости цели бројеви k и l такви да је $a = kd$ и $b = ld$. Значи да је $kdx_0 + ldy_0 = c$, тј. $d(kx_0 + ly_0) = c$. Лева страна једнакости је дељива са d, па мора бити и десна, тј. $d \mid c$.

Обрнуто нека је $d \mid c$. Тада постоји цео број m такав да је $c = md$. Како се број d може представити као хомогена линеарна функција од a и b[220], то је $d = \alpha a + \beta b$ ($\alpha \in Z$, $\beta \in Z$). Тада је $c = md = m(\alpha a + \beta b) = a(m\alpha) + b(m\beta)$, па је $x = m\alpha$, $y = m\beta$, једно решење дате једначине. ◊

Наведимо, без доказа, и две непосредне последице доказане теореме 2.

<u>*ТЕОРЕМА 3.*</u> *Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) има увек решење ако је NZD (a, b) = 1, тј. уколико су a и b узајамно прости цели бројеви.*

<u>*ТЕОРЕМА 4.*</u> *Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ (a, b и c су цели бројеви и $ab \neq 0$) нема решења ако се NZD (a, b) не садржи у c.*

<u>*ПРИМЕР 7.*</u> *Доказати да једначина $2x + 5y = 111$ има бесконачно много целобројних решења, а једначина $3x + 6y = 1000$ нема целобројних решења.*

РЕШЕЊЕ: Како су 2 и 5 узајамно прости прва једначина на основу теореме 3. увек има решења. Друга једначина се дељењем са 3 може трансформисати у облик $x + 2y = \frac{1000}{3}$ из кога је очигледно да нема целобројних решења. Δ

Јасно је да ако једначини $ax + by = c$, има решења, тј. уколико је NZD (a, b) = d ($d \neq 1$) делилац броја c, тада постоје цели бројеви k, l и m, такви да је $a = kd$, $b = ld$ и $c = md$. Једначина тада постаје $kdx + ldy = md$ или $кx + ly = m$.

---

[220] Та чињеница је позната у теорији бројева: [7.142.] Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева – Друштво математичара Србије, Београд, 2004. – стр. 44.

При том су k и l узајамно прости. Зато у суштини једначину ax + by = c треба и посматрати или трансформисати до облика у коме су a и b узајамно прости, јер се из тако трансформисане једначине одмах види егзистенција решења.

*

Како је проблем егзистенице решења једначине ax + by = c претходним разматрањима разрешен, следи покушај да се пронађе алгоритам за решавање свих линеарних Диофантових једначина.

7.2.2. ОЈЛЕРОВ МЕТОД РЕШАВАЊА ЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

<u>ПРИМЕР 8.</u> Одредити сва решења једначине 3x + 7y = 89, ако су x и y цели бројеви.

Како су 3 и 7 узајамно прости бројеви то једначина увек има решење.

Решавањем једначине по x и трансформацијом њене десне стране у количник, добија се $x = \dfrac{89-7y}{3} = 29-2y-\dfrac{y-2}{3}$, па је x цео број само ако је број y - 2 дељиво са 3, тј. ако је y - 2 = 3к, где је к неки цео број. Тада је y = 3к + 2, а x = 25 – 7к. Добијено решење је опште решење дате једначине и показује да дата једначина има бесконачно много решења, јер се за свако целобројно к добије уређени пар (x, y) = (25-7к, 3к+2) који је решење дате једначине. Δ

Овај поступак који је у теорији познат као Ојлеров[221] често није функционалан, јер се до коначног решења долази преко неколико итерација.

<u>ПРИМЕР 9.</u> Одредити сва решења једначине 40y – 63x = 521 ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 40 и 63 узајамно прости бројеви једначина има решење.

Из дате једначине је 40y = 63x + 521, па је $y = \dfrac{80x+520+1-17x}{40}$. Следи да је $y = 2x + 13 - \dfrac{17x-1}{40}$. Да би y био цео број мора бити $\dfrac{17x-1}{40} = a$, где је a неки цео број.

---

[221] Ојлер је у 5. делу "Алгебре" из 1770. године описао своју методу за решавање линеарне Диофантове једначине - видети [7.117.]: Jože Graselli – Diofantske enačbe – Knjižica Sigma – Ljubljana, 1984. – стр. 30. и стр. 130.

Како је $17x - 1 = 40a$, то је $x = \frac{40a + 1}{17} = 2a + \frac{6a + 1}{17}$. Сада ће x бити цео број ако је $\frac{6a + 1}{17} = b$. Одавде је $6a + 1 = 17b$. Следи да је $a = \frac{17b - 1}{6} = 3b - \frac{b + 1}{6}$. Да би a био цео број мора бити $b + 1 = 6к$, одакле је $b = 6к - 1$. Тада је $a = 3(6к - 1) - к = 17к - 3$, а одавде је $x = 2(17к - 3) + 6к - 1 = 34к - 6 + 6к - 1 = 40к - 7$. Коначно, $y = 2(40к - 7) + 13 - a = 80к - 14 + 13 - 17к + 3 = 63к + 2$. Дакле, опште решење дате једначине је $x = 40к - 7$, $y = 63к + 2$.

Међутим, иако је изложени поступак једноставан, он није лак за техничку реализацију. Зато се поставља питање налажења сигурнијег метода.

7.2.3. МЕТОД ПОЧЕТНОГ РЕШЕЊА

Нека је (x_0, y_0) једно целобројно решење једначине $ax + by = c$, где су a и b узајамно прости цели бројеви. Како је $ax_0 + by_0 = c$, то је и $ax + by = ax_0 + by_0$. Тада је $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Ако се цела једначина подели са b (јер b није нула) добија се да је $\frac{a}{b}(x - x_0) + y - y_0 = 0$. Како је десна страна једнакости цео број то мора бити и лева. Бројеви a и b су узајамно прости цели бројеви, што значи да $x - x_0$ мора бити дељиво са b. Дакле $x - x_0 = кb$, где је к било који цео број.

Тада је $x = x_0 + bк$, а $y = y_0 - aк$. Тиме је добијен један рационалан поступак за решавање једначине $ax + by = c$ који је прецизиран следећом теоремом.

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> Ако је уређени пар (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$ ($ab \neq 0$ и a и b су узајмно прости цели бројеви), тада и само тада је релацијама $x = x_0 + bk$ и $y = y_0 - aк$ (к је цео број) дефинисано опште решење дате једначине.

ДОКАЗ: Доказ да ако је (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$, да су тада сва решења дефинисана релацијама $x = x_0 + bк$ и $y = y_0 - aк$ (к је цео број) дат је у претходном разматрању.

Остаје да се докаже чињеница да ако је (x_0, y_0) једно решење и ако је $x = x_0 + bk$ и $y = y_0 - aк$ (к је цео број), да x и y задовољавају једначину $ax + by = c$. Заиста $ax + by = a(x_0 + bk) + b(y_0 - aк) = ax_0 + abк + by_0 - baк = ax_0 + by_0 = c$, јер је (x_0, y_0) једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$.

Докажимо и да других решења нема. Претпоставимо да је (α, β) једно од решења дате једначине које се не може приказати у облику $(x_0 + bк, y_0 - aк)$.

Ако је (α, β) једно решење дате једначине, онда је $a\alpha + b\beta = c$. Како је за свако целобројно к и $a(x_0 + bk) + b(y_0 - aк) = c$, то је $a(x_0 + bk) + b(y_0 - aк) = a\alpha + b\beta$. Тада је $a(x_0 + bk - \alpha) + b(y_0 - aк - \beta) = 0$.

Како су a и b различити од 0, то је $x_0 + bk - \alpha = -\frac{b(y_0 - aк - \beta)}{a}$. Због тога што су a и b узајамно прости бројеви следи да је $y_0 - aк - \beta$ дељиво са a, па $y_0 - aк - \beta = a$ ($m \in Z$). Следи да је $\beta = y_0 - aк - am = y_0 - a(к + m)$. Ако је $к + m = n$ ($n \in Z$), тада је $\beta = y_0 - an$. У том случају је $x_0 + bk - \alpha = -\ bm$, па је $\alpha = x_0 + bk + bm = x_0 + b(k + m) = x_0 + bn$. Коначно се добијаα $= x_0 + bn$, $\beta = y_0 - an$, што је противуречност са претпоставком. ◊

<u>ПРИМЕР 10.</u> Одредити сва решења једначине 4x + 5y = 100, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Очигледно је $x_0 = 0$, $y_0 = 20$ једно решење дате једначине. Тада су сва решења дате једначине дефинисана релацијама $x = 5к$, $y = 20 - 4к$ ($к \in Z$). Δ

7.2.4. ДИОФАНТОВ МЕТОД

Претпоставимо да је за линеарну Диофантову једначину $ax + by = c$ (a и b су узајамно прости), познато једно решење једначине (x_o, y_o), тј нека је $ax_o + by_o = c$. Ако се на решавање линеране једначине примени Диофантов двопараметарски метод, онда се добије трансформација $x = x_o + mt$, $y = y_o + nt$ (m и n су цели бројеви). Тада из једнакости $ax + by = c$, следи да је $a(x_o + mt) + b(y_o + nt) = ax_o + amt + by_o + bnt = c = = ax_o + by_o$. Из добијене једнакости следи да је $amt + bnt = 0$, тј. $am + bn = 0$. Решавањем добијене једначине по m добија се $m = -\frac{bn}{a}$. Како m мора бити цео број и како су a и b узајамно прости то је $n = aк$ (к је неки цео број), па се добија да је $m = -\ bк$. Дакле, формуле $x = x_o - bкt$, $y = y_o + aкt$ генеришу решења једначине $ax + by = c$.

За $к = 1$, односно $к = -\ 1$ добијају се формуле ($x = x_o - bt$, $y = y_o + at$), односно ($x = x_o + bt$, $y = y_o - at$) идентичне формулама у теореми 5.

7.2.5. ПРИМЕНА ЕУКЛИДОВОГ АЛГОРИТМА У ОДРЕЂИВАЊУ ПОЧЕТНОГ РЕШЕЊА

У примени алгоритма датог у теореми 4. једини проблем може бити одређивање тог једног (партикуларног) решења (x_0, y_0). Један од могућих начина за коректно решавање тог проблема је примена Еуклидовог алгоритма и теореме 2,[222] којим се ефикасно одређује једно од бесконачно много могућих решења.

---

[222] Видети [7.152.]: Ратко Тошић, Вања Вукославчевић: Елементи теорије бројева – Алеф, Нови Сад, 1995. - стр. 61. (пример 2)

ПРИМЕР 11. *Одредити почетно решење, а потом решити Диофантову једначину* $155x - 95y = 100$.

РЕШЕЊЕ: Дата једначина има решење, јер је $d(155, 95) = 5$, а $5 \mid 100$. Према томе једначина се дељењем са 5 може упростити, тако да се добије $31x - 19y = 20$. Како је $d(31, 19) = 1$, то постоје цели бројеви α и β такви да је $31\alpha - 19\beta = 1$. Бројеви α и β се одређују Еуклидовим алгоритмом:

$31 = 1 \cdot 19 + 12$; $19 = 1 \cdot 12 + 7$; $12 = 1 \cdot 7 + 5$; $7 = 1 \cdot 5 + 2$; $5 = 2 \cdot 2 + 1$.

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 3(12 - 1 \cdot 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5(19 - 1 \cdot 12) = 8 \cdot 12 - 5 \cdot 19 = 8(31 - 1 \cdot 19) - 5 \cdot 19 = 8 \cdot 31 - 13 \cdot 19$.

Дакле $\alpha = 8$ и $\beta = 13$. Како је $31\alpha - 19\beta = 1$, то је $20(31\alpha - 19\beta) = 20$, па је $31 \cdot 20\alpha - 19 \cdot 20\beta = 20$, па је $x_o = 20\alpha = 20 \cdot 8 = 160$ и $y_o = 20\beta = 20 \cdot 13 = 260$.

Према томе опште решење дате једначине је $x = 160 + 19к$; $y = 260 + 31к$ (к је цео број).

Иначе постоје "мањи" $(x_o, y_o) = (8, 12)$, али се тешко другачије могу одредити сем интуицијом или погађањем. Δ

7.2.6. ПРИМЕНА ЛИНЕАРНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Линеарне Диофантове једначине нису саме себи циљ и познавање алгоритма за њихово решавање не значи ништа уколико се он не примени у подесним ситуацијама. Следећи примери ће показати колико су линеарне Диофантове једначине моћно средство за решавање разних Диофантових проблема теоријске, али и практичне природе.

ПРИМЕР 12. *Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је* $4x + 7y = 2005$.

РЕШЕЊЕ: Како је $4 \cdot 496 + 7 \cdot 3 = 2005$, то је почетно решење дате једначине $(x_o, y_o) = (496, 3)$. Опште решење је тада $x = 496 - 7к$; $y = 3 + 4к$ (к је цео број). Оно што се тражи је да x и y истовремено буду природни, па мора бити: $x = 496 - 7к > 0$ и $y = 4к + 3 > 0$. Из прве неједнакости је $7к < 496$, па је $к \leq 70$. Због друге неједнакости је $4к > -3$, што значи да је $к \geq 0$. Према томе $0 \leq к \leq 70$, па се добија тачно 71 решење код кога су x и y позитивни бројеви. Δ

ПРИМЕР 13. *У једној књижари оловка кошта 0,5 (пола) €, свеска 1 €, а књига 5 €. На колико се начина за тачно 100 € може купити тачно 100 предмета? Колико од 100 купљених предмета су оловке, свеске и књиге?*

РЕШЕЊЕ: Нека је број купљених оловки x, број свески y и број књига z. Тада је $x + y + z = 100$, јер их укупно има 100. Цена купљених предмета је $\frac{1}{2}2x + y + 5z = 100$. Две добијене једначине представљају систем Диофантових једначина са три непознате. Ако се од прве једначине одузме друга добија се $\frac{1}{2}x - 4z = 0$. Следи да је $x = 8z$. Тада је $8z + y + z = 100$, па је $y = 100 - 8z$. Према томе опште решење добијеног система једначина је: $x = 8к$; $y = 100 – 9к$; $z = к$. С обзиром да је $0 \leq x = 8к \leq 100$, то је $0 \leq к \leq 12$.

Сва "реална" решења проблема дата су у следећој табели, јер теоријски проблем има бесконачно решења, али реално, у животној ситуацији свега 12:

к	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88
y	100	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

У наредним примерима нема експлицитно линеарних Диофантових једначина, али је линеарна једначина инструмент за решавање проблема.

ПРИМЕР 14. *Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је* $7x^2 - 3y^2 = 17$.

РЕШЕЊЕ: Нека је $x^2 = a$ и $y^2 = b$. Дата једначина је тада еквивалентна са једначином $7a - 3b = 17$ ($a \geq 0$, $b \geq. 0$). Једно решење дате једначине је $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, па је опште решење једначине $7a - 3b = 17$, дато формулама $a = 3к + 2$, $b = 7к – 1$. Дакле, $x^2 = 3к +2$ и $y^2 = 7к –1$. Како је $x^2 = 3к + 2$, то једначина нема решења, је није могуће да иједан квадрат природног броја при дељењу са 3 даје остатак 2. Δ

ПРИМЕР 15. *Постоје ли цели бројеви x и y такви да важи једнакост:* $3x^2 - 5xy + 2y^2 – 4x + 5y = 7$?[223]

РЕШЕЊЕ: Ако је $3x2 - 5xy + 2y2 – 4x + 5y = 7$, онда је $3x2 - 3xy + 3x - 2xy + 2y2 – 2y - 7x + 7y – 7 = 0$. То значи да је $3x(x – y +1) – 2y(x – y + 1) – 7(x – y + 1) = 0$, па је $(x – y + 1)(3x – 2y – 7) = 0$. Јасно је да мора бити $x – y + 1 = 0$ или $3x – 2y – 7 = 0$.

---

[223] Овај проблем се може успешно решити и Диофантовим методом.

Према томе дата једначина има бесконачно много решења која су описана формулама општих решења: 1) x = к и y = к + 1; 2) x = 2к + 1 и y = 3к - 2 (к је цео број). Δ

ПРИМЕР 16. *У скупу природних бројева решити једначину:* $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2005}^2 = 2035.$

РЕШЕЊЕ: Очигледно је већина бројева x_i једнака 1. Нека су $x_1, x_2, ... , x_к \geq 2$, а сви остали, дакле $x_{к+1} = ... = x_{2005} = 1$. Тада је $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 \geq 4к$, па је због тога $2035 = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2) + (x_{к+1}^2 + ... +x_{2004}^2 + x_{2005}^2) \geq 4к + (2005 – к) = 3к – 2005$. Из неједнакости $2035 \geq 3к – 2005$ следи да је $3к \leq 30$, па је $к \leq 10$. Дакле $x_{11} = ... = x_{2005} = 1$, па је $x_{11}^2 + x_{13}^2 + ... + x_{2005}^2 = 2005 – 10 = 1995$. Према томе $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = 2035 – 1995 = 40$.

Ако у скупу $\{x_1, x_2, ... , x_{10}\}$ има a јединица, b двојки, c тројки, d четворки, e петица и f шестица, онда је: a + b + c + d + e + f = 10 и a + 4b + 9c + 16d + 25e + 36f = 40. Ако се од друге одузме прва једначина добије се линеарна Диофантова једначина b + 8c + 15d + 24e + 35f = 30. Одмах је јасно да је f = 0. Ако је e = 1, онда је 3b + 8c + 15d = 7. У том случају би било b = 2, а сви остали би били 0, па би било a + b + c + d + e + f = 3, што је немогуће, јер тај збир износи 10. Дакле e = 0, па је 3b + 8c + 15d = 30. Како су 3b, 15d и 30 дељиви са 3, то мора бити и 8c, па се разлику два случаја c = 3 или c = 0.

1) Ако је c = 3, онда је 3b + 24 + 15d = 30, па је b + 5d = 2 и има једно решење:

- b = 2 и d = 0, c = 3, e = f = 0, a = 5, па је $3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + ... + 1^2 = 27 + 8 + + 2000 = 2035$ (3 тројке, 2 двојке и 2000 јединица);

2) Ако је c = 0, онда је 3b + 15d = 30, па је b + 5d = 10 и има три решења:

- b = 10, a = c = d = e = f = 0, па је $2^2 + ... 2^2 + 1^2 + ... + 1^2 = 40 + 1995 = 2035$ (10 двојки и 1995 јединица);
- b = 5 и d = 1, c = e = f = 0, a = 4, па је $4^2 + 2^2 + ... 2^2 + 1^2 + ... + 1^2 = 16 + 20 + 1999 = 2035$ (1 четворка, 5 двојки и 1999 јединица);
- b = 0 и d = 2, c = e = f = 0, a = 8, па је $4^2 + 4^2 + 1^2 + ... + 1^2 = 32 + 2003 = 2035$ (2 четворке и 2003 јединица);

7.3. НЕКЕ КВАДРАТНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Квадратне Диофантове једначине су велики математички полигон. Једначине ће бити разматране углавном у скупу природних бројева (ако другачије не буде наглашено), а сва разматрања се аналогно могу обавити и у скупу целих бројева, мада резултат не мора бити идентичан.

7.3.1. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $xy = n$ $(n \in N)$

Диофантова једначина $xy = n$ $(n \in N)$ има увек решења у скупу природних (а и целих) бројева и њено решавање није проблем, јер се своди на одређивање свих чинилаца броја n. Зато ће се ово разматрање односити на одређивање броја решења једначине $xy = n$ $(n \in N)$, јер се модел одређивања броја решења већине једначина заснива на моделу пребројавања броја решења управо ове једначине.

<u>ПРИМЕР 17.</u> *Колико решења (x, y) има једначина $xy = p^n$, ако су x, y и n природни, а p прост број.*

РЕШЕЊЕ: Једини делиоци броја p^n су $1, p, p^2, p^3, \dots, p^n$ па дата једначина има $n + 1$ решење, јер x узима све вредности од 1 до p^n, а y вредности $\frac{p^n}{x}$. Δ

<u>ПРИМЕР 18.</u> *Ако је канонски облик природног броја $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ онда је број решења једначине Диофантове једначине $xy = n$ у скупу природних бројева $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$.*

РЕШЕЊЕ: Број x може бити ма који делилац природног броја n. Како n има тачно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$ делилаца то једначина $xy = n$, у скупу природних бројева има $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1)$ решења. ◊

<u>ПРИМЕР 19.</u> *Одредити најмањи природан број n, тако да једначина $xy = n$ има 10 решења.*

РЕШЕЊЕ: Како је $r = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 10$, то постоји неколико могућности:

1) $\alpha_1 + 1 = 10, \alpha_2 + 1 = \alpha_3 + 1 = \dots = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 2^9 = 512$.
2) $\alpha_1 + 1 = 5, \alpha_2 + 1 = 2, \alpha_3 + 1 = \dots = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 2^{4\cdot}3 = 48$.
3) $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 5, \alpha_3 + 1 = \dots = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 2\cdot3^4 = 162$.
4) $\alpha_1 + 1 = 1, \alpha_2 + 1 = 10, \alpha_3 + 1 = \dots = \alpha_к + 1 = 1$. Тада је $n = 3^9$.

Најмањи такав природан број је $n = 48$.

<u>ПРИМЕР 20.</u> *Колико уређених тројки (x, y, z) природних бројева x, y и z задовољава једначину $xyz = 12$.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $x = 1$, онда је $yz = 12 = 2^2\cdot3$, па једначина има $3\cdot2 = 6$ решења. Ако је $x = 2$, онда је $yz = 6 = 2\cdot3$, па једначина има $2\cdot2 = 4$ решења. У случају $x = 3$, $yz = 4 = 2^2$, па једначина има 3 решења. Уколико је $x = 4$ или $x = 6$, тада је $yz = 3$ односно $yz = 2$, па једначина има по 2 решења. И на крају, ако је $x = 12$, онда је $yz = 1$, па једначина има 1 решење. Једначина има укупно $6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18$ решења.

ПРИМЕР 21. *Колико решења у скупу природних бројева има једначина* $xyz = p^n$*, ако је* p *прост, а* n *природан број.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $x = 1$, онда је $yz = p^n$ и једначина има $n + 1$ решење. Уколико је $x = p$, онда је $yz = p^{n-1}$ и једначина има n решење. Ако је $x = p^2$, онда је $yz = p^{n-2}$ и једначина има $n - 1$ решење, ... Уколико је $x = p^{n,}$ онда је $yz = 1$ и једначина има 1 решење. Дакле, укупно има $1 + 2 + ... + n - 1 + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ решења.

7.3.2. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - y^2 = n \ (n \in N)$

Диофантова једначина $x^2 – y^2 = n$, где су x, y и n природни бројеви, је веома интересантна за анализу, јер се за сваки природан број n једначина лако решава коришћењем производа. Међутим, пре општег разматрања броја решења ове једначине, треба погледати неколико конкретних примера.

ПРИМЕР 22. *Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : а)* $x^2 – y^2 = 24$ *; b)* $x^2 – y^2 = 18$ *; c)* $x^2 – y^2 = 25$.

РЕШЕЊЕ: а) Како је $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 24 = 1{\cdot}24 = 2{\cdot}12 = 3{\cdot}8 = 4{\cdot}6$ и како су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности, то у обзир долазе само комбинације $x + y = 12$, $x – y = 2$, или $x + y = 6$, $x – y = 4$, па су решења дате једначине $(x, y) = (7, 5)$ или $(x, y) = (5, 1)$.

b) Слично из $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 18 = 1{\cdot}18 = 2{\cdot}9 = 3{\cdot}6$ следи да дата једначина нема решења, јер не постоји ниједна комбинација таква да су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности.

c) Како је $x^2 – y^2 = (x – y)(x + y) = 25 = 1{\cdot}25 = 5{\cdot}5$ и како су бројеви $x - y$ и $x + y$ исте парности, то у обзир долазе комбинација $x + y = 25$, $x – y = 1$, или $x + y = 5$, $x – y = 5$, па је једино решење дате једначине $(x, y) = (13, 12)$, јер друга комбинација даје решење $(x, y) = (5, 0)$ које не одговара условима задатка, зато што y није природан број.

Ако је канонски облик природног броја $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, онда једначина $x^2 – y^2 = (x + y)(x – y) = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ има решења ако су бројеви $x + y$ и $x – y$ исте парности, а то значи оба парна или оба непарна.

Број $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ има укупно $S = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ делилаца, од којих су $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$ непарни. Дакле број парних делилаца је $P = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_к + 1) = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_к + 1)$. Шта се дешава са решењима дате једначине за разне вредности броја α_1 најбоље илуструје следећи

<u>ТЕОРЕМА 6.</u> Ако је природан број $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$*, онда је број решења квадратне Диофантове једначине* $x^2 - y^2 = n$ *у скупу природних бројева једнак* $r = \left[\frac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$[224].

Доказ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $\alpha_1 = 0$, онда је број n непаран и P = 0, па су сви делиоци броја n непарни и има их тачно N. Тада је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ једнак броју парова $(x + y, x - y)$ а он је једнак половини укупног броја делилаца тј. $\frac{N}{2}$, јер је $x + y > x - y$ и сваки број $x + y$ има свој комплементаран делилац $\frac{n}{x+y} = x - y$. Како N може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат), то $\frac{N}{2}$ може бити природан број, али и не мора бити. Зато је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у овом случају $r = \left[\frac{N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$, јер када је $x^2 - y^2 = n = m^2$, пар $x + y = x - y = m$ отпада, пошто ће тада вредност y бити 0. Како је $|\alpha_1 - 1| = |0 - 1| = 1$ то је $r = \left[\frac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right]$.

2) Ако је $\alpha_1 = 1$, онда је $n = 2(2m + 1)$, тј број n је паран, али није дељив са 4. Тада је $P = N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ и тада, сваки паран делилац има свој комплементаран непаран делилац (и обрнуто). То значи да бројеви $x + y$ и $x - y$ никада нису исте парности, што истовремено значи да једначина $x^2 - y^2 = n$ у овом случају нема решења, тј. $r = 0$.

Како је $|\alpha_1 - 1| = |1 - 1| = 0$ то је $r = \left[\frac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)}{2}\right] = 0$

3) Ако је $\alpha_1 \geq 2$, онда је n број који је дељив са 4 и $P = \alpha_1(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$ је веће од $N = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Тада сваки непаран делилац има свој комплементарни парни делилац и у тим случајевима једначина $x^2 - y^2 = n$ нема решења, јер су бројеви $x + y$ и $x - y$ различите парности. Једначина има решења само када су бројеви $x + y$ и $x - y$ оба парни. Таквих делилаца има $P - N = \alpha_1(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) - (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Број решења је једнак броју парова $(x + y, x - y)$ који су исте парности (оба парна).

---

[224] [x] је ознака за највећи цео број који није већи од броја x.

Тада је $r = \left[\frac{P - N}{2}\right] = \left[\frac{(\alpha_1 -1)(\alpha_2 +1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k +1)}{2}\right]$, при чему се цео део узима јер и у овом случају број делилаца $\frac{P-N}{2}$ може бити паран (ако n није потпун квадрат), али и непаран број (ако је n потпун квадрат). Како је α_1 веће од 1, то је $\alpha_1 - 1 = |\alpha_1 - 1|$, па је $r = \left[\frac{|\alpha_1 - 1|(\alpha_2 +1)(\alpha_3 +1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k +1)}{2}\right]$. ◊

Следећи пример показује како формула дата у претходној теореми. “ради” за разне случајеве.

ПРИМЕР 23. *Одредити колико решења у скупу природних бројева имају једначине : a)* $x^2 – y^2 = 45$ *; b)* $x^2 – y^2 = 225$ *; c)* $x^2 – y^2 = 34$.

РЕШЕЊЕ: a) Како је 45 = $2^0 3^2 5^1$, то је број решења једначине $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)\cdot(1+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 2}{2}\right] = 3$.

b) Како је 225 = $2^0 3^2 5^2$, то је број решења $r = \left[\frac{|0-1|(2+1)(2+1)}{2}\right] = \left[\frac{3\cdot 3}{2}\right] = 4$.

c) Како је 34 = $2^1 17^1$, то је број решења $r = \left[\frac{|1-1|(1+1)}{2}\right] = 0$.

Примери који следе су непосредне последице добијеног резултата или једноставне примене доказане теореме.

ПРИМЕР 24. *Ако је к природан број, онда једначина* $x^2 – y^2 = 2^к$*, има* $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ *решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Како је $n = 2^k$, то је број решења $r = \left[\frac{|k-1|}{2}\right] = \left[\frac{k-1}{2}\right]$. ◊

ПРИМЕР 25. *Ако је p непаран прост број, онда једначина* $x^2 – y^2 = p$*, има само једно решење у скупу природних бројева. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Како је $p = 2^0 p^1$, то је број решења $r = \left[\frac{|0-1|\cdot(1+1)}{2}\right] = \left[\frac{1\cdot 2}{2}\right] = 1$.◊

ПРИМЕР 26. *Одредити природан број n, тако да једначине* $x^2 – y^2 = 2^n$ *има 2005 решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Једначина $x^2 - y^2 = 2^n$ има $r = \left[\frac{n-1}{2}\right] = 2005$ решења. Дакле $2005 \leq \frac{n-1}{2} < 2006$, па је $4010 \leq n - 1 < 4012$ или $4011 \leq n < 4003$. Значи n је 4011 или 4012. Δ

ПРИМЕР 27. Постоји ли природан број n, такав да једначина $x^2 - y^2 = 36^n$ има 49 решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: а) Једначина $x^2 - y^2 = 36^n = 2^{2n} \cdot 3^{2n}$ има $r = \left[\frac{(2n-1)(2n+1)}{2}\right] = \left[\frac{4n^2 - 1}{2}\right] = 2n^2 - 1$ решења. Из $2n^2 - 1 = 49$, следи да је $n^2 = 25$, тј. $n = 5$. Δ

ПРИМЕР 28. Доказати да једначина $x^2 - y^2 = 7^n$ има за сваки природан број n, више решења него једначина $x^2 - y^2 = 2^n$.

РЕШЕЊЕ: Једначина $x^2 - y^2 = 7^n$ има $r_1 = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ решења, а једначина $x^2 - y^2 = 2^n$ има $r_2 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ решења. Како је $r_1 = \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 = r_2 + 1$, то је $r_1 > r_2$. Δ

ПРИМЕР 29. Одредити природан број n, тако да једначине $x^2 - y^2 = 200$ и $x^2 - y^2 = 4^n$ имају једнак број решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Једначина $x^2 - y^2 = 200 = 2^3 \cdot 5^2$ има $r = \left[\frac{|3-1| \cdot (2+1)}{2}\right] = \left[\frac{2 \cdot 3}{2}\right] = 3$ решења. На основу теореме 28, једначина $x^2 - y^2 = 4^n = 2^{2n}$ има $r = \left[\frac{2n-1}{2}\right] = n-1$ решење. Према томе $n - 1 = 3$, па је $n = 4$, тј. једначина гласи $x^2 - y^2 = 4^4 = 256$. Δ

Интересантно је да се, користећи резултат примера 76., слично разматрање може извести и за број целобројних решења једначине $x^2 - y^2 = n$. О томе говори следећа теорема коју дајемо без доказа.

ТЕОРЕМА 7. Ако је канонски облик броја $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ онда је број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева $r = 2|\alpha_1 - 1|(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Директна последица претходног је и следеће тврђење које нећемо доказивати.

ПРИМЕР 30. Број решења једначине $x^2 - y^2 = n$ у скупу целих бројева је увек паран број.

7.3.3. ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = n$ $(n \in N)$

Код једначине $x^2 + y^2 = n$ није могуће, као код претходна два типа једначина експлицитно извести формулу за одређивање броја решења, али у ери рачунара за то вероватно и нема потребе. Ако једначина $x^2 + y^2 = n$ у скупу целих бројева има решење, број решења је коначан, јер је $|x| \leq \sqrt{n}$ и $|y| \leq \sqrt{n}$. Зато је код ове једначине већа потреба утврђивање егзистенције решења, јер се елиминацијом оних једначина које немају решења у многоме посао олакшава.

Анализом неколико првих природних бројева ($1^2 + 0^2 = 1$, $1^2 + 1^2 = 2$, $2^2 + 0^2 = 4$, $2^2 + 1^2 = 5$, $2^2 + 2^2 = 8$, $3^2 + 0^2 = 9$, $3^2 + 1^2 = 10$, $3^2 + 2^2 = 13$, …), уочава се да једначина има решења за неке вредности броја n који је облика 4к, 4к + 1, 4к + 2. Међутим, једначине $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 11$ ... у опште $x^2 + y^2 = n = 4к + 3$ немају решење, јер израз $x^2 + y^2$ при дељењу са 4 може имати само остатке 0, 1, 2. Зато се може формулисати следеће тврђење:

ПРИМЕР 31. *Ако је $n = 4k + 3$ $(к \in Z)$, онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева. Доказати.*

РЕШЕЊЕ: Како је 4к + 3 непаран број, то је један од бројева x и y паран, а други непаран. Нека је $x = 2m$, а $y = 2p + 1$. Тада је $x^2 + y^2 = 4m^2 + 4p^2 + 4p + 1 = 4к + 3$. Следи да је $4 (m^2 + p^2 + p) = 4к + 2$. Како је лева страна једнакости дељива са 4, а десна није, то једначина нема решења. ◊

Међутим, може се доказати и општије тврђење.

ПРИМЕР 32. *Ако је $n = 2^к (4m + 3)$, онда једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу целих бројева, при чему су к и m ненегативни цели бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је к = 0, онда се проблем своди на пример 88.

2) Ако је к = 1, онда је $x^2 + y^2 = n = 8m + 6$, па су x и y или оба парна или оба непарна. Ако су оба парна, онда је збир њихових квадрата дељив са 4, што у овом случају очигледно није. Ако су оба непарна онда је $x = 2p + 1$, а $y = 2q + 1$, па је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 8m + 6$. Следи да је $4(p^2 + p + q^2 + q) = 8m + 4$, а дељењем са 4 се добија $p(p + 1) + q(q + 1) = 2m + 1$. Како је лева страна једнакости парна (због збира производа по два узастопна броја), а десна непарна, то једначина нема решења.

3) Ако је $к \geq 2$ онда се сменом $x = 2^{[к/2]}$ a, $y = 2^{[к/2]}b$ (a и b су природни бројеви) једначина своди на један од претходна два случаја (први, ако је к паран и други случај ако је к непаран број). ◊

Дакле, сада се зна да једначина $x^2 + y^2 = n$ за $n \in \{3, 7, 11, \dots 6, 14, 22, \dots 12, 28, 44, 60, \dots\}$, тј za $n = 2^k(4m + 3)$ $(k \in N_o, m \in N)$ нема решења у скупу целих бројева.

Како бројева облика $2^k(4m + 3)$ ($k \in N_o$, $m \in N$) има бесконачно, без доказа се може констатовати да је непосредна последица претходног разматрања:

<u>ПРИМЕР 33.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ *нема решења у скупу целих бројева.*

Међутим, важно је испитати и да ли и када дата једначина има решења.

<u>ПРИМЕР 34.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина $x^2 + y^2 = n$ *има решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $n = 25к^2$, где је к неки природан број онда је $x = 3к$, $y = 4к$ једно решење једначине $x^2 + y^2 = 25к^2$, чиме је доказ завршен. ◊

Међутим, могу се извести и општији докази. На пример, ако је $n = к^2$ ($к \in N$, $к \geq 5$) онда се добија "Питагорина" једначина $x^2 + y^2 = к^2$, па су њена решења $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $k = p^2 + q^2$ ($p > q$; $(p,q) = 1$; p и q су различите парности), о чему ће ускоро бити речи.

Интересантно је и следеће тврђење дато кроз исказ

<u>ПРИМЕР 35.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к за које једначина $x^2 + y^2 = n$ *нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Како на основу примера 89. једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева за $n = 2^к(4m+3)$, то је за $к = 2$, број n дељив са 4 чиме је доказ завршен, јер дата формула генерише бесконачно много таквих бројева. ◊

Исто тако, није тешко доказати ни чињенице које садржи следећа

<u>ПРИМЕР 36.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к за које једначина $x^2 + y^2 = n$ *има решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Довољно је посматрати једначину $x^2 + y^2 = 100m^2$ ($m \in N$). Нека њена решења су: $x = 6m$ и $y = 8m$. Како је $100m^2$ дељиво са 4 то је доказ завршен, јер се за свако m (а њих има бесконачно много), добија једно решење дате једначине. ◊

Слично се може формулисати и

<u>ПРИМЕР 37.</u> Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 1 за које једначина $x^2 + y^2 = n$ *нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако је број n облика 3p где је p прост број облика 4к+3 (к је природан број), онда је 3p облика $3(4к + 3) = 12к + 9 = 4(3k + 2) + 1 = 4m + 1$. Како је број простих бројева облика 4к + 3 бесконачан,[225] довољно је доказати да за свако p једначина $x^2 + y^2 = 3p = 3(4к + 3)$ нема решења. Разликују се три случаја:

---

[225] Доказ ове чињенице је једноставан. Наиме, претпостави се да је простих бројева облика 4к+3 коначно и да је највећи од њих управо $p_к = 4a + 3$. Нека су $p_1, p_2, \dots p_{к-1}$ сви прости бројеви мањи од $p_к$. Онда је $p = 4p_1p_2 \dots p_к + 3$ прост, зато што при дељењу са свим простим бројевима даје остатак 3. Очигледно је p веће од $p_к$, што је противуречност.

1) Ако су x и y дељиви са 3, тј. $x = 3a$ и $y = 3b$, онда је $x^2 + y^2 = 9a^2 + 9b^2 = 3p = 3(4к+3)$ ($k, p \in N$). Тада је $3(a^2 + b^2) = p = 4к+3$. Како је лева страна дељива са 3, а десна није (p је прост број већи од 3, па није дељив са 3), то једначина нема решења.

2) Ако је $x = 3a$ и $y = 3b \pm 1$, онда је $x^2 + y^2 = 9a^2 + 9b^2 \pm 6b + 1 = 12к + 9$ ($k \in N$). Тада је $9a^2 + 9b^2 \pm 6b = 12к + 8$ или $3(3a^2 + 3b^2 \pm 2b) = 3(4к+2) + 2$. Лева страна једнакости је дељива са 3, а десна није, па једначина нема решења.

3) Ако је $x = 3a \pm 1$ и $y = 3b \pm 1$, онда је $x^2 + y^2 = 9a^2 \pm 6a + 1 + 9b^2 \pm 6b + 1 = 12к + 9$. Тада је $9a^2 \pm 6a + 9b^2 \pm 6b = 12к + 7$ или $3(3a^2 \pm 2a + 3b^2 \pm 2b) = 3(4к+2) + 1$. Лева страна једнакости је дељива са 3, а десна није, па једначина нема решења. ◊

На основу претходне теореме јасно је да једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења за $n \in \{21, 33, 57, 69, 93, ...\}$.

Интересантно је да важи и тврђење

ПРИМЕР 38. Постоји бесконачно много природних бројева n облика $4к + 1$ ($k \in N$) за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Ако је $x = 2a$ и $y = 2b + 1$, онда је $x^2 + y^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 = 4к + 1$. Како су a и b природни бројеви којих има бесконачно много, то постоји и бесконачно много бројева за које једначина има решења. ◊

На пример ако је $x = 2к$, $y = 1$, онда је $n = 4к^2 + 1$, тј. једначина $x^2 + y^2 = n$ има бесконачно много решења за $n \in \{5, 17, 37, 65, ..., 4к^2+ 1, \dots\}$, уопште за $n = 4к + 1$.

Остаје да се испита шта се дешава са једначином $x^2 + y^2 = n$, ако је n облика $4к + 2$ ($k \in N$). Одговоре на то питање дају следећи примери:

ПРИМЕР 39. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 за које једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Како на основу примера 89. једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у скупу природних бројева за $n = 2^к(4m+3)$ за $к = 1$, број $n = 8m + 6 = 4(2m+1) + 2$ при дељењу са 4 даје остатак 2, чиме је доказ завршен, јер дата формула генерише бесконачно много таквих бројева. ◊

Дакле, једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења за $n \in \{6, 14, 22, 30, 38, 46, ...\}$.

Међутим, важи и

ПРИМЕР 40. Постоји бесконачно много природних бројева n облика 4к + 2 за које једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Нека је $x = 2a + 1$ и $y = 2a – 1$ ($a \in N$). Тада је $x^2 + y^2 = 4a^2+4a + 1 + 4a^2– 4a+1 = 8a^2+2 = 4к+2$, што значи да се за сваку вредност природног броја a добија једна вредност n која има облик $4к + 2$. Ако је $x = 2к + 1$, $y = 1$, онда је $n = 4к^2 + 4к + 2$.◊

Једначина $x^2 + y^2 = n$ има решења за $n \in \{10, 26, 50, 82, 122, ...\}$.

Ако се жели резиме, он је прилично једноставан: Једначина $x^2 + y^2 = n$ за бесконачно много вредности броја n има решење, али за бесконачно много вредности n нема решења. Постоји бесконачно много вредности броја n облика 4к, 4к + 1, 4к + 2 за које једначина има решења, али исто тако и бесконачно много вредности за које једначина нема решења. Ако је n облика 4к + 3 једначина никада нема решења.

ПРИМЕР 41. Доказати да једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имају једнак број решења у скупу целих бројева.

РЕШЕЊЕ: Нека је (x_o, y_o) једно решење једначине $x^2 + y^2 = n$. Тада важи једнакост $x_o^2 + y_o^2 = n$. Следи да је $2x_o^2 + 2y_o^2 = x_o^2 + 2x_oy_o + y_o^2 + x_o^2 - 2\ x_oy_o^2 + y_o^2 = (x_o + y_o)^2 + (x_o - y_o)^2 = 2n$. То значи да сваком решењу (x_o, y_o) прве једначине одговара решење $(x_o + y_o, x_o - y_o)$ друге једначине. Како је та коресподенција обострано једнозначна то једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имају једнак број решења.

Овај пример је још један доказ закључака који су изведени решавањем претходних примера.

7.3.4. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = n$ $(n \in N)$

Једначина овог облика је већ била предмет разматрања у овом раду.[226] Из примера 36. следи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = n$ нема решења ако је n облика 8к – 1, тј. ниједан природан број облика 8к – 1 се не може приказати као збир квадрата три цела броја.

Остаје да се прикаже један од могућих начина за решавања Диофантове једначине $x^2 + y^2 + z^2 = n$ $(n \neq 8к – 1)$.

ПРИМЕР 42. Одредити целе бројеве x, y, z такве да је $x^2 + y^2 + z^2 = 2005$.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су два од тражених бројева x, y, z парни, а трећи непаран. Нека је x = 2a, y = 2b и z = 2z + 1. Тада је $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 2005$. Даљом трансформацијом добија се $a^2 + b^2 + c(c + 1) = 501$. Како је c(c + 1) паран број, то a^2+b^2 мора бити непаран број, па је један од бројева a и b паран, а други непаран. Дакле, a = 2d и b = 2e + 1, па се добија једнакост $4d^2 + 4e^2 + 4e + c(c + 1) = 500$. Очигледно је да c(c + 1) мора бити дељиво са 4.

Доња таблица приказује могуће вредности за c(c + 1) и a^2+b^2. Као потенцијална решења елиминишемо вредности c(c + 1) које нису дељиве са 4 (коментар 1) и вредности a^2+b^2 које као фактор имају број облика 4к+3 на непарном степену (коментар 2):

---

[226] Видети примере 30. и 37.

c	c(c+1)	a^2+b^2	ком. 1	ком. 2	c	c(c+1)	a^2+b^2	ком. 1	ком. 2
0	0	501	-	-	11	132	369	+	$12^2 + 15^2$
1	2	499	-		12	156	345	+	-
2	6	495	-		13	182	319	-	
3	12	489	+	-	14	210	291	-	-
4	20	481	+	$20^2 + 9^2$	15	240	261	+	-
5	30	471	-	-	16	272	229	+	$15^2 + 2^2$
6	42	459	-	-	17	306	195	-	-
7	56	445	+	$21^2 + 2^2$	18	342	159	-	-
8	72	429	+	-	19	380	121	+	$11^2 + 0^2$
9	90	411	-	-	20	420	81	+	$9^2 + 0^2$
10	110	391	-		21	462	39	-	-

Из табеле је јасно да дата једначина има 6 решења у скупу целих ненегативних бројева. При том свако решење, због симетричности једначине, подразумева и све пермутације добијених бројева. То значи да наредна таблица садржи само почетну пермутацију, а да се остале због учињене напомене подразумевају:

a	b	c	x	y	z	$x^2 + y^2 + z^2$
20	9	4	40	18	9	1600 + 324 + 81 = 2005
21	2	7	42	4	15	1764 + 16 + 225 = 2005
15	12	11	30	24	23	900 + 576 + 529 = 2005
15	2	16	30	4	33	900 + 16 + 1089 = 2005
11	0	19	22	0	39	484 + 0 + 1521 = 2005
9	0	20	18	0	41	324 + 0 + 1681 = 2005

Може се запазити да су међу добијеним решењима и једина два решења једначине $x^2 + y^2 = 2005$ ((22, 39), (18, 41)), као и да се прво решење једначине $40^2 + 9^2 + 18^2 = 41^2 + 18^2 = 2005$ у ствари трансформише из решења (18, 41).

7.3.5. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ $(n \in N, n \geq 4)$

Француски математичар Лагранж[227] је доказао да се сваки природан број n може приказати као збир квадрата четири цела броја,[228] тј. да Диофантова једначина $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$ има решење за сваки природан број n.[229]

---

[227] Лагранж - J. L. Lagrange (1736 – 1813)

[228] Доказ ове Лагранжове теореме видети у [7.142.] - стр. 70-72.

[229] У вези са овим треба поменути иВарингов проблем који је формулисан 1770. године, којим је постављена хипотеза да се сваки природан број може написати као збир 4 квадрата, збир 9 кубова, 12 бројева четвртог степена... (Edvard Waring 1734-1798, енглески математичар)

Дакле, остаје да се одређују конкретне репрезентације сваког природног броја у виду збира четири квадрата и пребројава колико таквих репрезентација постоји.

<u>ПРИМЕР 43.</u> Број 2005 приказати као збир квадрата четири цела броја на бар један од могућих начина.

РЕШЕЊЕ: Из претходног примера може се направити неколико таквих репрезентација, без амбиције да су то и све репрезентације, при чему се репрезентације не праве додавањем нула:

- $40^2 + 18^2 + 9^2 = 24^2 + 32^2 + 18^2 + 9^2 = 2005$;
- $42^2 + 4^2 + 15^2 = 42^2 + 4^2 + 12^2 + 8^2 = 2005$;

Следећих неколико четворки нису изведене из претходног примера:

- $44^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 = 2005$;
- $38^2 + 23^2 + 6^2 + 6^2 = 2005$.

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_к^2 = n$ (к $\in$N) је за к > 4, са аспекта решивости, мање атрактивна за истраживање, али би било интересантно истражити да ли постоји и каква је законитост расподеле броја решења дате једначине зависно од броја n, као и броја сабирака к.

7.3.6. ПИТАГОРИНА ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = z^2$

Један од најзанимљивијих проблема теорије бројева свакако је проблем Питагориних бројева, тј. питање решења Питагорине Диофантове једначине.

<u>ДЕФИНИЦИЈА 2:</u> Питагориним бројевима или Питагориним тројкама (x, y; z) називају се природни бројеви x, y и z који задовољавају Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$.

Троугао чији су мерни бројеви страница x, y и z природни бројеви који задовољавају релацију $x^2 + y^2 = z^2$ назива се Питагорин троугао.[230]

<u>ТЕОРЕМА 8.</u> Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и тројка (y, x; z) Питагорина тројка.

ДОКАЗ: Очигледно је да ако важи да је $x^2 + y^2 = z^2$, онда важи и $y^2 + x^2 = z^2$, што значи да ако је (x, y ; z) Питагорина тројка онда је и (y, x; z) такође Питагорина тројка. ◊

<u>ТЕОРЕМА 9.</u> Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је и (кx, кy; кz) такође Питагорина тројка (к је природан број).

---

[230] На основу Питагорине теореме такав троугао је правоугли. Зато убудуће кад кажемо страница троугла, онда мислимо на њену дужину и неименујемо мерну јединицу, већ само мерни број

ДОКАЗ: Ако је (x, y; z) Питагорина тројка, онда је $x^2 + y^2 = z^2$, али је онда и $к^2x^2 + к^2y^2 = к^2z^2$, што значи да је и $(кx)^2 + (кy)^2 = (кz)^2$. Дакле, (кx, кy; кz) је Питагорина тројка. ◊

<u>ТЕОРЕМА 10.</u> Питагориних тројки има бесконачно много.

ДОКАЗ: Како се за сваки природна број к од Питагорине тројке (x, y; z) може добити Питагорина тројка (кx, кy ; кz), јасно је да свака Питагорина тројка генерише бесконачно много нових Питагориних тројки ◊.

<u>ДЕФИНИЦИЈА 3:</u> Питагортина тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако су природни бројеви x, y и z узајамно прости.

Тако су Питагорине тројке (3, 4; 5) и (20, 21, 29) основне, а (12, 16, 20) и (40, 42, 58) изведене, јер су добијене од основних множењем са 4, односно са 2.

<u>ТЕОРЕМА 11.</u> Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда су x и y природни бројеви различите парности.

ДОКАЗ: Ако су x и y парни бројеви онда је x = 2a и y = 2b (a, b $\in$ N). Тада је NZD(x, y) = NZD(2a, 2b) = 2. То значи да x и y нису узајамно прости јер имају заједнички делилац већи од 1, па ова могућност отпада.

Ако су x = 2a + 1 и y = 2b + 1 (a, b $\in$ N) непарни бројеви онда је z паран број, z = 2c (c $\in$ N), па се из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, добија $(2a+1)^2 + (2b+1)^2 = (2c)^2$ или $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2$. Како је са десне стране једнакости број који је дељив са 4, а са леве стране број који при дељењу са 4 даје остатак 2, то једнакост није могућа.

Дакле, x и y не могу бити исте парности. ◊

Из ове теореме следи:

<u>ТЕОРЕМА 12.</u> Ако је (x, y; z) основна Питагорина тројка, онда је z непаран природан број.

<u>ТЕОРЕМА 13.</u> Тројка (x, y; z) је основна Питагорина тројка, ако и само ако постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$; $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$, при чему је $m > n$, NZD (m, n) = 1 и m и n су различите парности.

ДОКАЗ: Нека је x паран, а y и z непарни чланови основне Питагорине тројке (x, y; z). Из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, следи да је $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z – y)$. Бројеви z + y = 2a и z – y = 2b су парни, па је $x^2 = 4ab$.

Треба доказати да су a и b узајамно прости. Ако се претпостави супротно, тј. да a и b имају заједнички делилац d, онда је z + y = kd и z – y = ld. Тада је 2z = d(к + l), а 2y = d(k – l), па y и z нису узајмно прости, што је у супротности са претпоставком да је (x, y; z) основна Питагорина тројка.

Како су a и b узајамно прости, да би $x^2 = 4ab$ био потпун квадрат мора бити $a = m^2$ и $b = n^2$. Тада је $x^2 = 4m^2n^2$, па је $x = 2mn$. Слично је $z + y = 2m^2$ и $z – y = 2n^2$, тј. $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

Да би y био природан број мора бити $m^2 > n^2$, тј. $m > n$. Бројеви m и n морају бити узајамно прости, јер ако би имали заједнички делилац, онда би тај делилац био заједнички и за x, y и z. И на крају m и n морају бити различите парности јер би у супротном x, y и z били парни и имали заједнички делилац 2.

Треба још доказ извести у другом смеру тј. да $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$, јесу елементи Питагорине тројке. Како је $x^2 + y^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2n^2 + m^4 – 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$. Бројеви x, y и z су узајамно прости, јер када би имали заједнички делилац, онда би он био заједнички делилац и за m и n, што није могуће, јер су m и n узајамно прости. ◊

Теорема јасно доказује да ако m и n испуњавају задате услове, онда се добија основна Питагорина тројка. На пример ако је m = 3, а n = 2, онда је x = 12, y = 5 и z = 13. Међутим, важно је напоменути да ако m и n не испуњавају дате услове, опет се добија Питагорина тројка, али она није основна. Тако се за m = 4 и n = 2 добија x = 16, y = 12 и z = 20. ◊

Следећа табела показује како добијено опште решење Питагорине једначине генерише неке основне и изведене Питагорине тројке:

		Основне Питагорине тројке			Изведене Питагорине тројке								
m	n	x	y	z	к = 2			К = 3			к = 4		
					x	y	z	x	y	z	x	y	z
2	1	4	3	5	8	6	10	12	9	15	16	12	20
3	2	12	5	13	24	10	26	36	15	39	48	20	52
4	1	8	15	17	16	30	34	24	45	51	32	60	68
4	3	24	7	25	48	14	50	72	21	75	96	28	100
5	2	20	21	29	40	42	58	60	63	87	80	84	116
5	4	40	9	41	80	18	82	120	27	123	160	36	164
6	1	12	35	37	24	70	74	36	105	111	48	140	148
6	5	60	11	61	120	22	122	180	33	183	240	44	244
7	2	28	45	53	56	90	106	84	135	159	112	180	212
7	4	56	33	65	112	66	130	168	99	195	224	132	260
7	6	84	13	85	168	26	170	252	39	255	336	52	340

Претходна теорема се може доказати и на друге начине. Наводимо још два доказа основне теореме о Питагориним бројевима, без доказа за релације између параметара m и n, који се може извести аналогно.

А. ДИОФАНТОВ ДОКАЗ

Нека је дата једначина $x^2 + y^2 = z^2$. Тада је $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$. Ако се уведе смена $a = \frac{y}{z}$ и $b = \frac{x}{z}$ једначина постаје $a^2 + b^2 = 1$. На добијену једначину се сада примени Диофантов метод.[231] Како је (-1, 0) једно решење добијене једначине следи да је: $a = -1 + mt$ и $b = nt$ (m и n су неки природни бројеви).

Тада је $(mt - 1)^2 + (nt)^2 = 1$, па је $1 – 2m + m^2t^2 + n^2t^2 = 1$. Из ове једнакости је $t = \frac{2m}{m^2 + n^2}$, а одговарајуће вредности за a и b су: $a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ и $b = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$. Ако се врати првобитна смена, добије се $x = 2кmn$, $y = к(m^2 – n^2)$ и $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$. ◊

B. АЛГЕБАРСКИ ДОКАЗ[232]

Из $x^2 + y^2 = z^2$ следи $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z – y)$. Ако се од ове релације формира пропорција $\frac{x}{z-y} = \frac{z+y}{x} = \frac{m}{n}$ (m и n су неки природни бројеви), налазимо да је $z + y = \frac{mx}{n}$ и $z – y = \frac{nx}{m}$. Решавањем претходног система једначина по z и y добија се $\frac{z}{x} = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$ и $\frac{y}{x} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}$. Тада је $x = 2кmn$, $y = к(m^2 - n^2)$, $z = к(m^2 + n^2)$. За к = 1, добија се тражена формула $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$. ◊

Примери који следе су задаци које је Диофант Александријски решавао у својој "Аритметици", додуше у нешто модификованој форми.[277]

ПРИМЕР 44. Одредити све Питагорине троуглове код којих је једна страница једнака 12.

РЕШЕЊЕ: Разликују се три случаја:

1) Ако је $x = 2mn = 12$, онда је:

---

[231] Видети [7.128.] : Диофант – Аритметика, стр. 217

[232] Видети [7.144.] Борис Павковић – Диофантове једнаџбе – ДММ "Питагора" – Бели Манастир, 1988. – стр. 14.

1.1) $m = 6, n = 1$ и $x = 12, y = 35, z = 37$;

1.2) $m = 3, n = 2$ и $x = 12, y = 5, z = 13$;

2) Ако је $y = m^2 – n^2 = (m + n)(m – n) = 12$, онда је $m + n = 6$, а $m – n = 2$. Тада је $m = 4$ и $n = 2$, па је $x = 16$, $y = 12$ и $z = 20$.

3) Ако је $z = m^2 + n^2 = 12$, онда је јасно да не постоје природни бројеви m и n чији збир квадрата је 12, па су три претходно добијене Питагорине тројке једина решења. Δ

<u>ПРИМЕР 45.</u> Ако је (x, y, z) основна Питагорина тројка, онда је x увек дељиво са 4, y је непаран број већи од 1, а z је облика 4к + 1. Доказати.

РЕШЕЊЕ: Како су у формули која генерише основне Питагорине тројке бројеви m и n различите парности, то је један од њих паран, а други непаран. На пример: $m = 2p$ и $n = 2q + 1$. Тада је $x = 2mn = 4p(2q + 1) = 4a$ и $y = m^2 – n^2$ је непаран број (као разлика квадрата парног и непарног броја). Јасно је да је $z = m^2 + n^2 = (2p)^2 + (2q + 1)^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 4b + 1$. Δ

<u>ПРИМЕР 46.</u> Доказати да постоји бесконачно много правоуглих троуглова код којих је хипотенуза за 1 већа од катете.

РЕШЕЊЕ: Како су y и z непарни бројеви, то они не могу бити и узастопни. Према томе $x + 1 = z$ или $2mn + 1 = m^2 + n^2$. Следи да је $m^2 + n^2 - 2mn = 1$, па је $(m - n)^2 = 1$. Дакле, $m = n + 1$, па све основне Питагорине троуглове код којих је хипотенуза за један већа од катете генеришу једнакости: $x = 2n(n + 1)$, $y = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, $z = (n + 1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$. Δ

<u>ПРИМЕР 47.</u> Ако је к природан број већи од 2, онда увек постоји Питагорина тројка чији је елеменат број к. Доказати. Да ли тврђење важи и за основне Питагорине тројке?

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је к паран број, онда је јасно да је $x = 2mn = к$, па је $2m = к$ и $n = 1$. Тада је $y = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1$ и $z = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1$.

2) Ако је к непаран број онда је $y = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = к$ или $m + n = k$ и $m - n = 1$. Тада је $m = \frac{k+1}{2}$ и $n = \frac{k-1}{2}$, а $x = \frac{k^2-1}{2}$; $y = k$ и $z = \frac{k^2+1}{2}$.

Тврђење не важи за основне Питагорине тројке. На пример број 14 није елеменат ниједне основне Питагорине тројке, јер једначине $2mn = 14$, $m^2 - n^2 = 14$ и $m^2 + n^2 = 14$, где су m и n природни бројеви различите парности, немају решења у скупу природних бројева. Може се доказати да 14 није усамљен случај, већ да таквих бројева има бесконачно много. Δ

ПРИМЕР 48. *Одредити све Питагорине троуглове чији мерни број обима је једнак мерном броју површине.*

РЕШЕЊЕ: Обим Питагориног троугла је $2mn + m^2 - n^2 + m^2 + n^2 = 2mn + 2m^2 = 2(m + n)m$, а површина $mn(m^2 - n^2)$. Дакле, $2(m + n)m = mn(m - n)(m + n)$, па је $(m - n)n = 2$. Следи да је $n = 1$, а $m - n = 2$ или $n = 2$, а $m - n = 1$. Према томе постоје два решења: $(m, n) = (3, 1)$ или $(m, n) = (3, 2)$. Странице троугла су тада (6, 8, 10), а O = P = 24 или (12, 5,13) O = P = 30. Δ

C. ХЕРОНОВИ ТРОУГЛОВИ

Теорија Питагориних бројева омогућује да се каже нека реч и о Хероновим троугловима.

ДЕФИНИЦИЈА 4: *Хероновим троугловима називају се сви они троуглови чији су мерни бројеви страница природни бројеви и чији је мерни број површине такође природан број (даље у тексту се увек мисли на мерне бројеве).*

Тако троугао чије су странице 13, 14, 15 има површину 84 и Херонов је, а троугао чије су странице 10, 15 и 20 није Херонов, јер је његова површина ирационалан број.

ТЕОРЕМА 14. *Сви Питагорини троуглови истовремено су и Херонови.*

ДОКАЗ: Површина Питагориног троугла је $P = mn(m^2 - n^2)$ и како су m и n природни бројеви, то је и површина природан број, што значи да су сви Питагорини троуглови истовремено и Херонови. ◊

Обрнуто тврђење на важи. Сви Херонови троуглови нису Питагорини, а контра пример је Херонов троугао чије су странице 13, 14 и 15.

ТЕОРЕМА 15. *Постоји бесконачно много Херонових троуглова.*

ДОКАЗ: Како су сви Питагорини троуглови (теорема 11) и како Питагориних троуглова има бесконачно много (теорема 7) то је јасно да и Херонових троуглова има бесконачно много. ◊

ТЕОРЕМА 16. *Ако се "слепе" два Питагорина троугла који имају једнаку бар једну катету, добија се Херонов троугао.*

ДОКАЗ: Нека су (x, y, z) (x, y`, z`) два основна Питагорина троугла са заједничком катетом x. Слепљивањем троуглова дуж заједничке катете x добија се троугао чије су странице y + y`, z и z`. Страници y + y` одговара висина x. Разликују се два случаја:

1) Ако је x = 2к паран број, онда је површина троугла природан број к(y + y`).

2) Ако је х = 2к +1 непаран, онда су у и у\` парни па је и у + у\` такође паран број, што значи да је површина троугла природан број. ◊

ТЕОРЕМА 17. *Не постоји једнакостраничан нити једнакокраки Херонов троугао.*

ДОКАЗ: Ако је мерни број страница једнакостраничног троугла једнак природном броју к, онда је површина троугла једнака $\frac{k^2\sqrt{3}}{4}$, дакле ирационалан број. Ако је у једнакокраком правоуглом троуглу мерни број катете природан број к, онда је хипотенуза ирационалан број $к\sqrt{2}$. Обрнуто, ако је мерни број хипотенузе природан број к, онда су катете ирационални бројеви $\frac{k\sqrt{2}}{2}$. ◊

ТЕОРЕМА 18. *Постоји бесконачно много једнакокраких Херонових троуглова.*

ДОКАЗ: "Слепљивањем" два подударна Питагорина троугла дуж било које од подударних катета, увек се добија једнакокраки Херонов троугао. Како Питагориних троуглова има бесконачно много, то и једнакокраких Херонових троуглова има бесконачно много. ◊

ДЕФИНИЦИЈА 5. *Херонов троугао који није правоугли, а чије су све странице различите, назива се прави Херонов троугао.*

ТЕОРЕМА 19. *Правих Херонових троуглова има бесконачно много.*

ДОКАЗ: Троугао чије су странице 13, 20, 21 је Херонов троугао, јер има површину 126. Ако су странице троугла 13к, 20к, 21к (к је природан број), онда је његова површина $126к^2$, па је на тај начин дефинисано бесконачно много правих Херонових троуглова. ◊

ПРИМЕР 49. *Колико има Херонових троуглова чија је једна висина 20?*

РЕШЕЊЕ: Висина дели троугао на два правоугла троугла. Ако је у правоуглом троуглу једна катета 20, онда је $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 400$, где је z хипотенуза, а у друга катета у том троуглу. Како су х+у и х-у увек исте парности то су могући једино случајеви $(z - y)(z + y) = 2\cdot200 = 4\cdot100 = 8\cdot50 = 10\cdot40$, па таквих Питагориних троуглова има 4: (20, 99, 101), (20, 48, 52), (20, 21, 29) и (20, 15, 25). "Слепљивањем" ових правоуглих троуглова дуж катете једнаке 20 добија се десет Херонових троуглови: (101, 101, 198); (52, 101, 147); (29, 101, 120); (25, 101, 114); (52, 52, 96); (29, 52, 69); (25, 52, 63); (29, 29, 42); (25, 29, 36); (30, 25, 25). Δ

ПРИМЕР 50. *Одредити бар један прави Херонов троугао код кога су и полупречник описаног и полупречник уписаног круга природни бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Троугао чије су странице 13к, 14к и 15к има обим 2s = 42к и површину Р = $84к^2$.

Полупречник уписаног круга је $r = \frac{P}{s} = \frac{84k^2}{21k} = 4k$, а полупречник описаног круга је $R = \frac{abc}{4P} = \frac{13k \cdot 14k \cdot 15k}{4 \cdot 84k^2} = \frac{65k}{8}$. За к = 8, добија се Херонов троугао чије су странице 104, 112 и 120, површина 5376, полупречник уписаног круга 32, а полупречник описаног круга 65. Δ

<u>ПРИМЕР 51.</u> Формулама $a = 4m^2 + n^2$; $b = 2m^2 + 2n^2$; $c = 6m^2 - 3n^2$ (m и n су природни бројеви такви да је m > n) дефинисана је једна класа Херонових троуглова. Доказати.

РЕШЕЊЕ: Ако се дуж катете 4mn "слепе" два Питагорина троугла чије су странице ($4mn$, $2m^2 - 2n^2$, $2m^2 + 2n^2$) и ($4mn$, $4m^2 - n^2$, $4m^2 + n^2$), онда су странице добијеног Хероновог троугла ($4m^2 + n^2$, $2m^2 + 2n^2$, $4m^2 - n^2 + 2m^2 - 2n^2 = 6m^2 - 3n^2$). Δ

Добијена формула генерише бесконачно много Херонових троуглова. Међутим, она није једина која "производи" Херонове троуглове, јер се сличним слепљивањима могу добити и друге сличне формуле.

Материја Херонових троуглова отвара лепе могућности за самостално истраживање и то не само због могућности "слепљивања" него и због тражења других занимљивих особина ових троуглова.

У том смислу је интересантно истаћи следећи проблем: *Да ли је Херонових троуглова чије су дужине страница узастопни природни бројеви, коначно или бесконачно много?*

Очигледно је да постоје и Херонови четвороуглови, а то су они четвороуглови који имају све странице целобројне и чија је површина цео број (7, 24, 20, 15). Међутим, то је предмет нове посебне приче.

7.3.7. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$

Једначина $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ се може посматрати као проширење Питагорине једначине. Постављају се класична питања: да ли једначина има и колико решења? Може ли се одредити опште решење?

<u>ПРИМЕР 52.</u> Доказати да Питагориних четворки, тј. бројева који задовољавају једначину $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, где су x, y, z и t природни бројеви, има бесконачно много.

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, то је (3, 4, 12, 13) једна Питагорина четворка. Међутим, тада је и (3к, 4к, 12к, 13к) такође Питагорина четворка, што доказује да Питагориних четворки има бесконачно много, мада добијено решење не описује и све Питагорине четворке. Δ

Ако би се у истраживању једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ кренуло и мало даље могло би се закључити следеће: Како број t^2 при дељењу са 4 даје остатак 0 или 1, то и лева страна једнакости мора имати исти остатак при дељењу са 4. Јасно је да ако је t паран онда и x, y и z морају бити парни, па се дељењем једначине са 4 (једном, два, или више пута), опет на крају долази до случаја када је t непаран. Тада је очигледно да су два од три броја x, y и z парни, а један непаран.

Нека је $x = 2p$ и $y = 2q\ ^2$. Нека је z непаран. Како је $t > z$ и како су оба непарна то је њихова разлика паран број, тј. $t – z = 2r$ или $t = 2r + z$. Како је $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, то је $x^2 + y^2 = 4p^2 + 4q^2 = t^2 - z^2 = (t – z)(t + z) = 2r\,(2r + z + z) = 4r^2 + 4rz$· Из једнакости $4p^2 + 4q^2 = 4r^2 + 4rz$ следи да је $p^2 + q^2 - r^2 = rz$. Тада је $z = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$ уз услове: (1) $p^2 + q^2$ је дељиво са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$. Тиме је добијено опште решење једначине и може се формулисати генерално тврђење које се неће доказивати, јер је доказ садржан у претходном разматрању.

<u>ТЕОРЕМА 20.</u> Опште решење једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ у скупу природних бројева дефинисано је релацијама $x = 2p$, $y = 2q$, $z = \dfrac{p^2 + q^2 - r^2}{r}$ и $t = \dfrac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$ где су p, q и r природни бројеви који испуњавају следеће услове: (1) $p^2 + q^2$ је дељиво са r; (2) $p^2 + q^2 > r^2$.

Нека решења дате једначине $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ приказана су у следећој табели и сортирана по растућим вредностима броја t:

p	q	p^2+q^2	r	x	y	z	t
1	1	2	2	2	2	1	3
2	1	5	1	4	2	4	6
3	1	10	2	6	2	3	7
4	2	20	4	8	4	1	9
3	1	10	1	6	2	9	11
6	2	40	8	12	4	3	13
5	1	26	2	10	2	11	15
7	1	50	5	14	2	5	15
6	4	52	4	12	8	9	17

ПРИМЕР 53. *Одредити све бројеве x, y, z, тако да је* $x^2 + y^2 + z^2 = 15^2$.

РЕШЕЊЕ: На основу теореме 16. следи да је $t = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{r}$, односно $p^2 + q^2 + r^2 = 15r$. Провером за разне вредности r ($0 < r < t = 15$) добија се да је $p^2 + q^2 \in \{14, 26, 36, 44, 50, 54, 56\}$. Како је $26 = 1^2 + 5^2$, $36 = 0^2 + 6^2$; $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, то су сва решења: $2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$; $0^2 + 12^2 + 9^2 = 15^2$; $2^2 + 14^2 + 5^2 = 15^2$; $10^2 + 10^2 + 5^2 = 15^2$. Δ

ПРИМЕР 54. Доказати да не постоје три узастопна природна броја чији је збир квадрата једнак квадрату неког природног броја.

РЕШЕЊЕ: У суштини треба доказати да једначина $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ нема целобројних решења. Из дате једначине је јасно да је $3x^2 + 2 = y^2$, што говори да квадрат броја у при дељењу са 3 даје остатак 2, што је немогуће, јер не постоји цео број чији квадрат при дељењу са 3 даје остатак 2. Δ

7.3.8. ЈЕДНАЧИНА $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$

Једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ је већ разматрана за n једнако 2 и 3. Наредни примери показују да једначина има бесконачно много решења, а могу се извести и много детаљнија разматрања проблема.[233]

ПРИМЕР 55. *Доказати да једначина* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2$ *има бесконачно много решења.*

РЕШЕЊЕ: Како је $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, то је фамилија решења дате једначине дефинисана уређеном петорком (3к, 4к, 12к, 84к, 85к), где је к било који природан број. Очигледно је да таквих решења има бесконачно много, чиме је доказ завршен. Δ

Сличан доказ се може извести и за општи случај.

ПРИМЕР 56. *Доказати да једначина* $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ *има бесконачно много решења.*

РЕШЕЊЕ: Доказ се изводи математичком индукцијом по n ($n \geq. 2$).

1) За n = 2 тврђење важи (теорема о Питагориним тројкама).

2) Претпоставимо да једначина $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења.

---

[233] Детаљније о овој једначини видети у [7.117.] Jože Graselli – Diofantske enačbe – Knjižica Sigma – Ljubljana, 1984. – стр. 64 - 67.
Детаљније о овој једначини, али и многим другим Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

3.1.) Ако је x_{n+1} паран број, онда је $x_{n+1} = 2к$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к$, $y_{n+1} = к^2 - 1$, $y_{n+2} = к^2 +1$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$. Како је по индукцијској претпоставци једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 = x_{n+1}^2$ има бесконачно много решења то и једначина $x_1^2 + x_2^2 + ...+ x_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ има бесконачно много решења.

3.2) Ако је x_{n+1} ненепаран број, онда је $x_{n+1} = 2к + 1$, па постоји Питагорина тројка $x_{n+1} = y_n = 2к + 1$, $y_{n+1} = 2к(к + 1)$, $y_{n+2} = к^2 + (к +1)^2$. Тада је $y_n^2 + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2$ и даљи ток доказа је идентичан доказу под 3.1). Δ

Идеја садржана у овом претходном доказу може бити квалитетно искоришћена за формирање Питагориних n-торки ($3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, $3^2 + 4^2 +12^2+ 84^2 = 85^2$...) и решавање квадратних Диофантових једначина облика $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$. Конкретан алгоритам који разматра начин решавања ове Диофантове једначине је присутан у литератури[234] и може се веома успешно пренети и на рачунаре, чиме се олакшава израчунавање решења.

7.3.9. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = 2z^2$

Једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ има тривијално решење $x = y = z = к$. Али се поставља питање и других решења. У примеру 130. доказано је да једначина $x^2 + y^2 = n$ има једнак број решења[235] као једначина $x^2 + y^2 = 2n$, па је чак успостављена и једнозначна кореcподенција између решења ових дeју једначина: $(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$.

То значи да ако једначина $x^2 + y^2 = z^2$ има опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = |m^2 – n^2 + 2mn|$, $y = |m^2 - n^2 - 2mn|$ и $z = m^2 + n^2$. Треба нагласити да су услови за параметре m и n једнаки условима код Питагорине једначине.

7.3.10. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + y^2 = pz^2$

Раније је доказано да Диофантова једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ сем тривијалног решења (0, 0, 0) нема других решења.[236]

Једначина $x^2 + y^2 = 4z^2$ се може посматрати у облику $x^2 + y^2 = (2z)^2$, па је јасно да је тада (x, y, 2z) Питагорина тројка. То значи да је њено опште решење $x = 2mn$, $y = m^2 – n^2$ и $2z = m^2 + n^2$, уз додатне услове за природне бројеве m и n: (1) $m > n$; (2) m и n су исте парности (јер ће само тако z бити природан број).[237]

---

[234] Видети [7.117.] Jože Graselli – Diofantske enačbe – Ljubljana, 1984. – стр. 66 - 70.

[235] То значи да ако једначина $x^2 – y^2 = n$ нема решења, онда их нема ни једначина $x^2 – y^2 = 2n$.

[236] Видети раније разматрано потпоглавље 6.3.9. о решавању Диофантових једначина методом "најмањег" решења

[237] Као што је за Питагорине бројеве направљена таблица решења, тако се може учинити и за све друге једначине чија решења зависе од два или више параметара.

Једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ има бесконачно много решења облика $x = y = z = к$ ($к \in N$). Поставља се питање има ли и других решења? У примеру 97. доказано је да једначина $x^2 + y^2 = n$ има једнак број решења као једначина $x^2 + y^2 = 2n$, па је чак успостављена и једнозначна коресподенција између решења ових двеју једначина: $(x, y) \to (x - y, x + y)$.

Међутим, решења једначине $x^2 + y^2 = 4z^2$ се могу посматрати и као коресподентна са решењима једначине $x^2 + y^2 = 2z^2$. Тада ће се добити опште решење: $x = 4mn$, $y = 2(m^2 – n^2)$ и $z = m^2 + n^2$. Овај начин решавања проблема је интересантан због тога што је очигледно да једначина $x^2 + y^2 = pz^2$ има нетривијалниа решења и лако се долази до решење за све бројеве $p = 2^к$.

Слично се може посматрати и једначина $x^2 + y^2 = 5z^2$. Она има тривијално решење (к, 2к, к). Ако се примени Диофантов метод, после увођења смене једначина се своди на $a^2 + b^2 = 5$, а потом се трансформацијом $a = 2 + mt$, $b = 1 + nt$, и враћањем смене добија опште решење једначине: $x = 2n^2 - 2m^2 - 2mn$, $y = m^2 - n^2 - 4mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Једначина $x^2 + y^2 = 6z^2$ сем тривијалног (0, 0, 0) нема других целобројних решења. Ово следи из чињенице да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења (број решења је 0), јер тада и једначина $x^2 + y^2 = 2 \cdot 3z^2$ има исти број решења.

Ако је $x^2 + y^2 = 7z^{2,}$ онда се методом "најмањег" решења може доказати да дата једначина, сем тривијалног нема других решења.

Једначина $x^2 + y^2 = 8z^2$, спада у класу једначина $x^2 + y^2 = 2^кz^2$ и има нетривијално решење.

Јасно је да једначина $x^2 + y^2 = 9z^2$ има тривијално решење (3к, 0, к). Како је $x^2 + y^2 = (3z)^2$, онда је опште решење једначине дефинисано релацијама: $x = 6mn$, $y = 3(m^2 – n^2)$ и $z = m^2 + n^2$.

За једначину $x^2 + y^2 = 10z^2 = 5 \cdot 2z^2$ се опште решење може извести из решења једначине $x^2 + y^2 = 5z^2$ и процес истраживања се може наставити појединачним разматрањима.

Општа хипотеза која би се могла ученицима дати на проверу, као мали истраживачки задатак, је да једначина $x^2 + y^2 = pz^2$, по аналогији са једначином $x^2 + y^2 = p$, нема решење у случају да p као фактор садржи бар један фактор облика 4к+3 на непарном степену.

7.3.11. ЈЕДНАЧИНА $x^2 + py^2 = z^2$

Једначина $x^2 + 2y^2 = z^2$ се трансформацијом $y^2 = z^2 – x^2 = (z + x)(z – x)$ своди на систем једначина $z + x = 2y$, $z – x = y$. Како y мора бити паран, значи y = 2к, добија се да је $z = \frac{3y}{2} = 3к$ и $x = \frac{y}{2} = к$. Дакле, једно решење је x = к, y = 2к, z = 3к.

Међутим, овим једноставним трансформацијама су дата само нека, али не и сва решења. Диофантовим методом добија се једно од могућих класа решења решења: $x = 2n^2 – m^2 – 8mn$, $y = 2m^2 – 4n^2 – 2mn$ $z = 3(m^2 + 2n^2)$.

Ако се посматра једначина $x^2 + 3y^2 = z^2$, онда је тривијално решење једначине $x = y = z = к$. Диофантов метод доста лако даје једну класу решења: $x = 3n^2 – m^2 – 6mn$, $y = m^2 – 3n^2 – 2mn$ $z = 2(m^2 + 3n^2)$.

Очигледно је да за свако p дата једначина $x^2 + py^2 = z^2$ има бесконачно много решења која се добијају трансформацијом $py^2 = z^2 – x^2 = (z + x)(z – x)$ и решавањем једног од могућих систем једначина (на пример) $z + x = py$, $z – x = y$. Ако се стави да је $y = 2к$, добија се фамилија решења: $x = (p – 1)к$, $y = 2к$, $z = (p + 1)к$.

"Боља" решења се могу добити Диофантовом и другим методама.[238]

7.3.12. ЈЕДНАЧИНА $px^2 + qy^2 = rz^2$

Једначина $px^2 + qy^2 = rz^2$ где су p, q и r дати природни бројеви се може разматрати слично претходним случајевима.[239] Размотримо неколико конкретних примера:

<u>ПРИМЕР 57.</u> Одредити опште решење једначине $2x^2 + 7y^2 = z^2$ *у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Једно партикуларно решење ће помоћи да се Диофантовим методом одреди бар једна формула која генерише бесконачно много решења. Како је једно такво решење $xo = 3$, $yo = 1$, $zo = 5$, једначина има бесконачно много решења која генеришу формуле: $x = 3к$, $y = к$, $z = 5к$.

Класа решења се добија Диофантовим методом и после обављених трансформација следи двопраметарско решење дате Диофантове једначине: $x = 21n^2 – 54m^2 – 70mn$, $y = 2m^2 – 63n^2 – 60mn$; $z = 5 (2m^2 + 7n^2)$. Δ

<u>ПРИМЕР 58.</u> Одредити сва решења једначине $3x^2 + 5y^2 = 30z^2$ *у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Како су $5y^2$ и $30z^2$ дељиви са 5 то мора и $3x^2$ бити дељиво са 5, што значи да је $x = 5a$. Тада се добија једначина $75a^2 + 5y^2 = 30z^2$. Дељењем са 5 следи да је $15a^2 + y^2 = 6z^2$. Како су $15a^2$ и $6z^2$ дељиви са 3, то мора бити и y^2, па је $y = 3b$. Тада је $15a^2 + 9b^2 = 6z^2$ и дељењем са 3 добија се једначина $5a^2 + 3 b^2 = 2z^2$. Једно од могућих решења добијене једачине је $a_o = 1$, $b_o = 1$ и $z_o = 2$.

---

[238] Једно решење једначине $x^2 + py^2 = z^{2,}$ за ситуацију када је p прост број видети у [7.117.]:
Jože Graselli – Diofantske enačbe – Knjižica Sigma – Ljubljana, 1984. – стр. 64 - 67.
Детаљније о квадратним Диофантовим једначинама, може се видети и на сајту
http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html

[239] Опште решење квадратне Диофантове једначине видети у [7.142.] - стр. 50-51.

Добијена једначина је еквивалентна са једначином $5\left(\frac{a}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{z}\right)^2 = 2$. Ако се уведе смена $\alpha = \frac{a}{z}$ и $\beta = \frac{b}{z}$, онда је $5\alpha^2 + 3\beta^2 = 2$. Једно решење добијене једначине је $\alpha o = \beta o = \frac{1}{2}$. Ако је $\alpha = \frac{1}{2} + mt$ $\beta = \frac{1}{2} + nt$, добија се да је $t = -\frac{5m + 3n}{5m^2 + 3n^2}$.

После примене свих коришчених смена добија се двопараметарска класа решења дате једначине: $x = 5(3n^2 - 5m^2 - 6mn)$ $y = 3(5m^2 - 3n^2 - 10mn)$ $z = 2(5m^2 + 3n^2)$. Δ

ПРИМЕР 59. *Доказати да једначина $4x^2 + 16y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако се уведу смене $2x = a$ и $4y = b$, једначина постаје $a^2 + b^2 = 3z^2$. Раније је доказано да једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема решења у скупу природних бројева, чиме је доказано да и дата једначина нема решења. Δ

7.3.13. НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ СИСТЕМИ КВАДРАТНИХ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Једна од најједноставнијих примена третираних квадратних Диофантових једначина је могућа код система једначина. Неки системи Диофантових једначина већ су коришћени. О још некима ће бити речи у наредним примерима.

ПРИМЕР 60. *Одредити све целе бројеве x и y тако да је $x^3 - y^3 = 91$.* [240]

РЕШЕЊЕ: Иако ово није у суштини систем, већ једна једначина, она се у суштини своди на систем Диофантових једначина, од којих је једна квадратна. Како је $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ и како је $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + (x+y)^2\right) \geq 0$ то значи да су оба фактора, дакле $x - y$ и $x^2 + xy + y^2$ позитивна, јер њихов производ мора бити $91 = 7 \cdot 13$. Због тога се разликују четири случаја:

1) $x - y = 1$ и $x^2 + xy + y^2 = 91$; 2) $x - y = 7$ и $x^2 + xy + y^2 = 13$;

3) $x - y = 13$ и $x^2 + xy + y^2 = 7$; 4) $x - y = 91$ и $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Решавањем ова четири система добијају се и сва решења датог проблема: (- 5, - 6); (3, - 4); (4, - 3); (6, 5). Δ

---

[241] Задатак је са 1. МО у Пољској 1949. године. Видети [7.150.] Старшевич С, Бровкин Е. – Польские математические олимпиады – Мир – Москва, 1978.

ПРИМЕР 61. *У скупу природних бројева решити систем једначина:* $x+y=zt,\ z+t=xy.$[241]

РЕШЕЊЕ: Ако се дате једначине саберу добија се $xy + zt = x + y + z + t$, одакле је $xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2$. Факторизацијом се добија следећа једначина: $(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2$. Разликују се три случаја:

1) Ако је $(x-1)(y-1) = 0$, онда је $(z-1)(t-1) = 2$. Тада је је $x = 1$ или $y = 1$, а из $(z-1)(t-1) = 2$ се добијају две могућности: $z = 2, t = 3$ или $z = 3, t = 2$. Тада је $x + y = 6$ и $xy = 5$, па се добијају следећа решења (1, 5, 2, 3); (1, 5, 3, 2); (5, 1, 2, 3); (5, 1, 3, 2).

2) Ако је $(x-1)(y-1) = 1$ и $(z-1)(t-1) = 2$, онда је $x = y = z = t = 2$.

3) $(x-1)(y-1) = 2$ и $(z-1)(t-1) = 0$, добијају се решења која су симетрична са случајем под 1). Дакле решења су: (2, 3, 1, 5); (2, 3, 5, 1); (3, 2, 1, 5); (3, 2, 5, 1).

Према томе једначина има укупно 9 решења. Δ

ПРИМЕР 62. *Одредити све целе бројеве x, y и z који задовољавају једначине* $z^2 - xy = x + y + 6$ *и* $x^2 + y^2 = z^2$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$, онда је прва једначина $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, па се множењем са 2 добија $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy = 14$. Добијена једначина $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 14$ има решења ако су сабирци 1^2, 2^2 и 3^2.

Разликовањем случајева добијају се решења једначине $x^2 + y^2 - xy - x - y = 6$, односно једначине $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 14$. Та решења су: (2, -1); (-1, 2); (0, 3); (3, 0); (4, 3); (3, 4). Очигледно да другу једначину $x^2 + y^2 = z^2$ задовољавају само решења $(x, y, z) \in \{ (0, 3, 3); (3, 0, 3), (3, 4, 5); (4, 3, 5)\}$.

ПРИМЕР 63. *Доказати да систем једначина:* $x^2 + y^2 = z^2,\ y^2 + z^2 = t^2$ *нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Ако је $x^2 + y^2 = z^2$ и $y^2 + z^2 = t^2$, онда је $x^2 + t^2 = 2z^2$. Добијена једначина има решења $x = x_o - t_o$, $t = x_o + t_o$, где су x_o и t_o решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$.[242] Како је опште решења једначине $x^2 + t^2 = z^2$ дато формулама $x_o = 2mn$, $t_o = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$, онда ће једначина $x^2 + t^2 = 2z^2$ имати опште решење које је дефинисано формулама: $x = m^2 - n^2 - 2mn$, $t = m^2 - n^2 + 2mn$ и $z = m^2 + n^2$.

Како је из друге једначине система $y^2 = t^2 - z^2$, то је $y^2 = (m^2 - n^2 + 2mn)^2 - (m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2)(m^2 - n^2 + 2mn - m^2 - n^2) = (2m^2 + 2mn)(2mn - 2n^2) = 2m(m + n)2n(m - n)$. Дакле, $y^2 = 4mn(m^2 - n^2)$.

---

[241] Задатак је са 29. Московске МО из 1967. године. Видети [7.118.] : Гальперин Г.А., А.К. Толпыго - Московские математические олимпиады – "Просвещение", Москва, 1987.

[242] Видети поглавље 7.3.9.

Нека је $D(m, n) = d$. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $m = ad$ и $n = bd$. Следи да је $y^2 = 4mn\,(m^2 - n^2) = 4ad \cdot bd\,(a^2d^2 - b^2d^2) = 4ab \cdot d^4\,(a^2 - b^2)$.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4\,(a^2 - b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 - b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab\,(a^2 - b^2)$ био потпун квадрат потребно је да буде $a^2 - b^2 = к^2\, a{\cdot}b$, односно $a^2 - к^2a{\cdot}b - b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по a, решавањем једначине се добија $a_{1,2} = \dfrac{к^2b \pm \sqrt{к^4b^2 + 4b^2}}{2} = \dfrac{к^2b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}$.

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = p^2$ има јединствено решење $p = 2$, $к = 0$.

Ако је $к = 0$, онда је $a^2 - b^2 = к^2\, a{\cdot}b = 0$, па је $a = b$, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви. Δ

7.4. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА $x^2 - py^2 = 1$

Међу Диофантовим једначинама за које постоји алгоритам за њихово решавање својом занимљивошћу се истиче једначина облика $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није квадрат ниједног целог броја. Једначина облика $x^2 - py^2 = 1$ у математичкој литератури се најчешће среће под називом Пелова једначина,[243] али није много мање распрострањен ни термин Фермаова једначина.[244] Међутим, познато је да су се том једначином интензивно бавили и Архимед, Диофант, Баскара, Лагранж, Валис, Ојлер, Гаус, ...

У осврту на еволуцију идеја које су кроз историју пратиле Диофантове једначине већ је било говора о Пеловој једначини и спору који постоји око њеног назива. Било је говора и о двема најважнијим чињеницама за њено решавање: о томе да Пелова једначина има бесконачно много решења, што је доказао Лагранж[245], и о начину одређивања такозваног основног решења, које је захваљујући моћима савремене рачунарске технологије све мањи проблем.

Пелова једначина има облик $x^2 - py^2 = 1$, где је p природан број који није потпун квадрат. Услов да p није потпун квадрат је неопходан, јер у супротном једначина, сем тривијалног $(x_o, y_o) = (1, 0)$ нема других решења.

---

[243] John Pell (1610 – 1685. г.), енглески математичар

[244] Ferma (Piere Fermat 1601-1665. г.), француски математичар

[245] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813. г.), француски математичар

У расветљавању алгоритма за решавање Пелове једначине могуће је више приступа, али су најуобичајнија два: геометријски и алгебарски. Могућ је и трећи, историјски приступ, који се заснива на примени Диофантовог метода (алгоритма).

7.4.1. АЛГЕБАРСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Ако је $x^2 - py^2 = 1$, онда важи и релација $(x - y\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = 1$, која је врло употребљива за степеновање и остале алгебарске трансформације .

Претпоставимо да поред тривијалног постоји и једно нетривијално решење, на пример (x_1, y_1). Ако је (x_1, y_1) једно нетривијално решење дате једначине, онда је $(x_1 - y_1\sqrt{p})(x_1 + y_1\sqrt{p}) = 1$. Степеновањем дате једнакости са n добија се нова релација $(x_1 - y_1\sqrt{p})^n(x_1 + y_1\sqrt{p})^n = (x_n - y_n\sqrt{p})(x_n + y_n\sqrt{p}) = 1$, где су x_n и y_n природни бројеви који такође задовољавају релацију $x^2 - py^2 = 1$.

Најмање од таквих решења (прецизније оно решење код којег је $x_1 + y_1\sqrt{p}$ најмање) назива се основним решењем. Оно што није сасвим тривијално је да се докаже да ако је (x_e, y_e) основно решење, тада су претходним поступком описана сва решења Пелове једначине.[246]

"Када је основно решење познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_e + y_e\sqrt{p})$ следи $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{p} = x_n x_e + p y_n y_e + \sqrt{p}(y_n x_e + y_e x_n)$. Изједначавањем рационалних и ирационалних делова једнакости добијају се рекуретне везе:

$$x_{n+1} = x_e\, x_n + p\, y_e\, y_n$$

$$y_{n+1} = y_e\, x_n + x_e\, y_n.$$

Низови (x_n) и (y_n) задовољавају претходно добијен систем диференцних једначина, уз почетне услове: $(x_o, y_o) = (1, 0)$. Из добијеног система диференцних једначина низови (x_n) и (y_n) се одређују рекурентно.

Могуће је извести и формуле за директно одређивање низова (x_n) и (y_n), при чему тражене формуле наводимо без одговарајућег доказа:[247]

---

[246] Доказ ове чињенице видети у [7.142.] : Мићић, Владимир, Зоран Каделбург, Душан Ђукић: Увод у теорију бројева - Друштво математичара Србије – Београд, 2004.

[247] Доказ је елементаран и може се извести директно из релације $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_e + y_e\sqrt{p})^n$ или решавањем добијеног система диференцних једначина

$$x_n = \frac{1}{2}\left((x_e + y_{e1}\sqrt{p})^n + (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{p}}\left((x_e + y_e\sqrt{p})^n - (x_e - y_e\sqrt{p})^n\right).$$

<u>ПРИМЕР 64.</u> Одредити опште решење једначине $x^2 - 3y^2 = 1$.

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење ове једначине је $(x_0, y_0) = (1, 0)$, а основно решење $(x_e, y_e) = (7, 4)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулама:

$$x_{n+1} = 7x_n + 12y_n,\quad y_{n+1} = 4x_n + 7y_n.$$

а нека од решења једначине дата су таблицом:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	1	7	97	1351	262087	3650401	50843527	708158977	9863382151
y_n	0	4	56	780	151316	2107560	29354524	408855776	5694626340

7.4.2. ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПЕЛОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Пелова једначина $x^2 - py^2 = 1$ ($p \neq n^2$) у Декартовој координатној равни дефинише хиперболу. Посматрајмо само њену позитивну полуграну. Очигледно је да уређени пар (1, 0) представља тривијално решење дате једначине, а тачка (1, 0) представља тачку хиперболе чије су обе координате целобројне. Нека је $(1, 0) = (x_0, y_0)$ и нека је (x_1, y_1); (x_2, y_2); ... (x_n, y_n) ... низ тачака које припадају датој хиперболи, а чије су обе координате целобројне.

Ако поред тачке (x_0, y_0), тј. тривијалног решења знамо још једно нетривијално решење, например (x_1, y_1), онда је могуће одредити трансформацију која ће генеристи и остала решења дате једначине. Та трансформација се може исказати следећим рекурентним формулама:

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$

$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

Бројеви a, b, c и d су целобројни коефицијенти које треба одредити тако да добијена трансформација дату хиперболу пресликава у саму себе.

Како је $x_1 = ax_0 + by_0$ и $y_1 = cx_0 + dy_0$, и како је $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$, то је очигледно $a = x_1$ и $c = y_1$. Дакле трансформација сада има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + by_n$$

$$y_{n+1} = y_1x_n + dy_n.$$

Због $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = 1$, следи да је $(x_1x_n + by_n)^2 - p(y_1x_n + dy_n)^2 = 1$. Одавде се квадрирањем добија $x_n^2 (x_1^2 - py_1^2) + 2x_n y_n(bx_1 - kdy_1) - y_n^2(kd^2 - b^2) = 1$. Како се траженом трансформацијом дата хипербола пресликава у саму себе, то је и $x_n^2 - py_n^2 = 1$, па због $x_1^2 - py_1^2 = 1$ закључујемо да је $bx_1 - pdy_1 = 0$ и $kd^2 - b^2 = p$. Решавањем добијеног система једначина по b и d добија се $b = py_1$ и $d = x_1$.

Коначно тражена трансформација има облик

$$x_{n+1} = x_1x_n + py_1y_n$$

$$y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n.$$

Очигледно је $x_{n+1}^2 - py_{n+1}^2 = (x_1x_n + py_1y_n)^2 - k(y_1x_n + x_1y_n)^2 = x_n^2(x_1^2 - py_1^2) + 2x_n y_n(kx_1y_1 - py_1x_1) - py_n^2(x_1^2 - py_1^2) = x_n^2 - py_n^2 = 1$, што је доказ да добијене рекурентне формуле задовољавају дату једначину.

Очигледно је и дата трансформација линеарна и њена детерминанта је

$$\begin{vmatrix} x_1 & ky_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 - py_1^2 = 1.$$

То значи да је добијена трансформација унимодуларна, што обезбеђује да је добијено пресликавање бијективно, а то опет значи, да ако постоји бар једно нетривијално целобројно решење Пелове једначине $x^2 - py^2 = 1$, онда се добијеном рекурентном формулом може произвести бесконачно много целобројних решења.

Међутим, одређивање основног решења је и само озбиљан проблем. У неким случајевима то може бити једноставно:

1) Ако је $p = a^2 - 1$, онда је $x^2 - py^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Следи да је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$, па је основно решење $(x_e, y_e) = (a, 1)$.

2) Ако је $p = a^2 + 1$, онда је $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$. Тада је $x^2 = a^2y^2 + y^2 + 1$. Да би $a^2y^2 + y^2 + 1$ био потпун квадрат треба да је $y^2 = 2ay$, па је $y = 2a$, а $x = ay + 1 = 2a^2 + 1$. Значи да је $(x_e, y_e) = (2a^2 + 1, 2a)$.

3) Ако једначина $x^2 - ay^2 = 1$, има решење (може бити, а не мора бити основно) $(x_к, y_к)$, онда једначина $x^2 - 4ay^2 = 1$, има решење $(x_к, y_к/2)$, јер из $x_к^2 - ay_к^2 = 1 = x^2 - 4ay^2$, следи $x = x_к$ и $4y^2 = y_к^2$. На пример основно решење за Пелову једначину $x^2 - 5y^2 = 1$ је (9, 4), а на основу тога се добија основно решење за $x^2 - 20y^2 = 1$ и оно је (9, 2).

3.1) Слична релација се може добити и ако се посматрају Пелове једначине $x^2 - ay^2 = 1$ и $x^2 - 9ay^2 = 1$, јер ће свако решење $(x_к, y_к)$ прве једначине генерисати основно решење $(x_к, \frac{y_к}{3})$ друге једначине. На пример, ако је $p = 7$, онда је $x_e = 8$, $y_e = 7$. Следи за $p = 7 \cdot 9 = 63$, $x_e = 8$, $y_e = 1$.

На основу ове три олакшице могуће је формирати таблицу основних решења за првих четрдесетак коефицијената p у Пеловој једначини $x^2 – py^2 = 1$:

p	x_e	y_e	p	x_e	y_e	p	x_e	y_e
2	3	2	17	33	8	30	11	2
3	2	1	18	17	4	31	1520	273
5	9	4	19	170	39	32	17	3
6	5	2	20	9	2	33	23	4
7	8	3	21	21	55	34	35	6
8	3	1	22	197	42	35	6	1
10	19	6	23	24	5	37	73	12
11	10	3	24	5	1	38	37	6
12	7	2	26	51	10	39	25	4
13	649	180	27	26	5	40	19	3
14	15	4	28	127	24	41	2049	320
15	4	1	29	9801	1820	42	13	2

7.4.3. ЈЕДНАЧИНЕ ПЕЛОВОГ ТИПА

Под једначинама Пеловог типа подразумевају се једначине облика $x^2 – py^2 = a$, где је p природан број који није потпун квадрат и a цео број различит од 0.

Дакле, поставља се питање да ли постоји алгоритам за решавања једначине $x^2 – py^2 = a$?

Нека је је (x_o, y_o) једно решење, а (x_n, y_n) опште решење једначине $x^2 – py^2 = a$ у скупу природних бројева и нека је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 – py^2 = 1$. Тада важе релације

$$x^2 - py^2 = (x + y\sqrt{p})(x - y\sqrt{p}) = a$$

$$x_n^2 - py_n^2 = (x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) = a$$

$$x_e^2 - py_e^2 = = (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = 1.$$

Из датих релација је

$$(x_n + y_n\sqrt{p})(x_n - y_n\sqrt{p}) = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_o - y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n (x_e - y_e\sqrt{p})^n = a.$$

Тада је очигледно $x_n + y_n\sqrt{p} = (x_o + y_o\sqrt{p}) \cdot (x_e + y_e\sqrt{p})^n$, што даје могућност за одређивање свих решења (x_n, y_n) једначине $x^2 – py^2 = a$, ако су позната основна решења (x_e, y_e) једначине $x^2 – py^2 = 1$ и (x_o, y_o) једначине $x^2 – py^2 = a$.

ПРИМЕР 65. *Одредити опште решење једначине $x^2 - 2y^2 = -1$.*

РЕШЕЊЕ: Тривијално решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (7, 5)$, а основно решење Пелове једначине $x^2 - 2y^2 = 1$ је $(x_e, y_e) = (3, 2)$. Тада су сва решења дате једначине у скупу природних бројева дефинисана формулом:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})n = (7+5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n. \Delta$$

*

Алгоритам за одређивање једначина Пеловог типа даје следећа

ТЕОРЕМА 21. *Ако једначина $x^2 - py^2 = a$ има бар једно решење, онда постоје цео број n и решење (x_o, y_o) дате једначине, за које важи $y_o^2 \le \frac{ay_e^2}{2(x_e+1)}$ ако је $a > 0$ и $y_o^2 \le \frac{-ay_e^2}{2(x_e+1)}$ ако је $a < 0$, такви да је $x_n + y_n\sqrt{p} = \pm(x_o + y_o\sqrt{p})(x_e - y_e\sqrt{p})^n$.*[248]

ПРИМЕР 66. *Одредити сва решења једначине $x^2 - 5y^2 = 44$ у скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Основно решење одговарајуће Пелове једначине $x^2 - 5y^2 = 1$ је $(x_e, y_e) = (9, 4)$. Применом претходне теореме добија се $y_o^2 \le \frac{44 \cdot 4^2}{2(9+1)} = 35{,}2$. То значи да је потенцијално $y_o \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Условима задатка одговарају решења дате једначине $(x_0, y_0) \in \{ (\pm 7, \pm 1);\ (\pm 8, \pm 2);\ (\pm 13, \pm 5) \}$.

Тада су сва решења дате једначине у скупу целих бројева дефинисана формулама:

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \begin{cases} \pm(7 \pm \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(8 \pm 2\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \\ \pm(13 \pm 5\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n \end{cases} \quad \text{где је n цео број. } \Delta$$

7.4.4. ПРИМЕНА ЈЕДНАЧИНА ПЕЛОВОГ ТИПА

Примери примене једначина Пеловог типа су многобројни, не само на решавање конкретних једначина Пеловог типа и једначина које се на њих своде, већ и на мноштво веома интересантних Диофантових проблема.

---

[248] Доказ ове теореме може се видети у [7.142.] - стр. 92 – 93.

ПРИМЕР 67. *За дати природни број n одредити један пар (x, y)природних бројева за које важи* $x^2 - 2y^2 = 1993^n$. [249]

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1993^n$ и како важи релација $(45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n = 1993^n$ јасно је да бројеви x и y задовољавају једнакост $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = (45 + 4\sqrt{2})^n(45 - 4\sqrt{2})^n$. Дакле $x + y\sqrt{2} = (45 + 4\sqrt{2})^n$, па је

$$x = 45^n + \binom{n}{2} 45^{n-2}(4\sqrt{2})^2 + \binom{n}{4} 45^{n-4}(4\sqrt{2})^4 + \ldots$$

$$y = \binom{n}{1} 45^{n-1} \cdot 4 + \binom{n}{3} 45^{n-3} \cdot 4^3 \cdot 2 + \binom{n}{5} 45^{n-5} \cdot 4^5 \cdot 2^2 + \ldots$$

Очигледно је да се за сваки природан број n добија један пар природних бројева (x, y).

ПРИМЕР 68. *Одредити три узастопна природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени природни бројеви y - 1, y и y + 1. Из услова задатка следи да је $(y - 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 = x^2$. Следи да је $x^2 = 3y^2 + 2$. Како не постоји природан број чији квадрат при дељењу са 3 даје остатак 2, то једначина нема решења. ∆

*

Овај пример показује да постоје Диофантове једначине Пеловог типа, као што је претходна $x^2 - 3y^2 = 2$, које немају решења. Следећи задатак указује на једну класу једначина Пеловог типа које имају решења.

ПРИМЕР 69. *Ако је p прост број облика 4к + 1, онда једначина* $x^2 - py^2 = -1$ *увек има целобројна решења.*

РЕШЕЊЕ: Нека је (x_e, y_e) основно, дакле најмање нетривијално решење једначине $x^2 - py^2 = 1$. Тада је $x_e^2 = py_e^2 + 1$. Ако је x_e паран број, онда је број $(4к+1)y_e^2 \equiv -1 \pmod 4$ што је немогуће, па је очигледно x_e непаран број. Тада су $x_e - 1$ и $x_e + 1$, два узастопна парна броја, па је $D(x_e - 1, x_e + 1) = 2$. Како је $(x_e - 1)(x_e + 1) = py_e^2$, то је један од бројева $x_e - 1$ и $x_e + 1$ облика $2a^2$, а други облика $2pb^2$ (a и b су цели бројеви).

Претпоставимо да је $x_e + 1 = 2a^2$ и $x_e - 1 = 2pb^2$. Тада је $2a^2 - 2pb^2 = 2$, па је $a^2 - pb^2 = 1$. Значи да је (a, b) једно нетривијално решење Пелове једначине $x^2 - py^2 = 1$. Из $(x_e + 1)(x_e - 1) = 2a^2 \cdot 2pb^2 = py_e^2$, следује да је $y_e = 2ab$.

---

[249] Видети [7.138.]: Мала олимпијада 1993. г.

Очигледно је $a < x_e$ и $b < y_e$, што је противуречност са претпоставком да је (x_e, y_e) најмање решење Пелове једначине. Значи да је $x_e - 1 = 2a^2$ и $x_e + 1 = 2pb^2$. Одузимањем друге од прве једнакости добија се $2a^2 - 2pb^2 = -2$, односно $a^2 - pb^2 = -1$, па једначина $x^2 - py^2 = -1$ има решење (a, b), што је и требало доказати. Δ

ПРИМЕР 70. Одредити све правоугле троуглове код којих су мерни бројеви катета разликују за 1. Да ли таквих троуглова има коначно или бесконачно много?

РЕШЕЊЕ: Из Питагорине једначине је познато да је $x = 2mn$ и $y = m^2 - n^2$. Очигледно је да постоје две могућности: $2mn = m^2 - n^2 - 1$ или $2mn = m^2 - n^2 + 1$.

1) Ако је $m^2 - n^2 - 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = 1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = 1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = 1$.

2) Ако је $m^2 - n^2 + 1 = 2mn$, онда је $m^2 - 2mn + n^2 - 2n^2 = -1$, односно $(m - n)^2 - 2n^2 = -1$, па су $m - n$ и n решења Пелове једначине $a^2 - 2b^2 = -1$.

Очигледно је да таквих троуглова има бесконачно много, а преглед првих неколико решења једне и друге једначине дајемо у следећој табели:

$a^2 - 2b^2 = 1$						
a	b	m	n	x	y	z
3	2	5	2	20	21	29
17	12	29	12	696	697	985
99	70	169	70	23660	23661	33461
577	408	985	408	803760	803761	1136689
3363	2378	5741	2378	27304196	27304197	38613965
$a^2 - 2b^2 = -1$						
1	1	2	1	4	3	5
7	5	12	5	120	119	169
41	29	70	29	4060	4059	5741
239	169	408	169	137904	137903	195025
1393	985	2378	985	4684660	4684659	6625109

ПРИМЕР 71. Ако су m и n природни бројеви и $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$, онда је m потпун квадрат. Доказати.

РЕШЕЊЕ: Да би m био природан број мора бити $28n^2 + 1 = a^2$. Тада је $a^2 - 28n^2 = 1$, па треба одредити бар једно n које задовољава дату једначину.

Једначина $x^2 - 28y^2 = 1$ има основно решење (127, 24).[250]

---

[250] Видети таблицу основних решења за разне вредности p у поглављу 7.4.2.

Сва решења добијене једначине $a^2 - 28n^2 = 1$ одређена су релацијама $a + n\sqrt{28} = (127 + 24\sqrt{28})^{к}$ и $a - n\sqrt{28} = (127 - 24\sqrt{28})^{к}$. Сабирањем ових релација добија се да је $2a = (127 + 24\sqrt{28})^{к} + (127 - 24\sqrt{28})^{к}$. Тада је $m = 2 + 2a = 2 + (127 + 24\sqrt{28})^{к} + (127 - 24\sqrt{28})^{к}$. Како су добијени изрази $(127 \pm 24\sqrt{28})^{к} = (127 \pm 48\sqrt{7})^{к} = (64 \pm 48\sqrt{7} + 63)^{к} = (8 \pm 3\sqrt{7})^{2к}$, то следи да је $m = (8 + 3\sqrt{7})^{2к} + 2 + (8 - 3\sqrt{7})^{2к} = \left((8 + 3\sqrt{7})^{к} + (8 - 3\sqrt{7})^{к}\right)^2$ па је доказ завршен.Δ

7.5. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СТЕПЕНА n (n > 2)

После квадратних Диофантових једначина нормално је да се пажња посвети и неким алгебарским Диофантовим једначинама степена већег од 2. Не упуштајући се у теоријска разматрања кроз примере ћемо илустровати неколико карактеристичних једначина трећег, четвртог и виших степена. Основни метод решавања ових једначина је коришћење идентичних алгебарских трансформација и већ познатих чињеница о Диофантовим једначинама.

ПРИМЕР 72. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = z^4$ има бесконачно много решења, ако су x, y и z цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како је $x^2 + y^2 = z^4 = (z^2)^2$, то је (x, y, z^2) Питагорина тројка. Значи да постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, z) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 - q^2$ и $z = p^2 + q^2$. Дакле, опште решење дате једначине је $x = 4pq(p^2 - q^2)$; $y = |4p^2q^2 - (p^2 - q^2)^2|$; $z = p^2 + q^2$. Из добијеног општег решења јасно је да дата једначина има бесконачно много целобројних решења. Δ

ПРИМЕР 73. Доказати да једначина $x^2 + 5 = y^3$ нема целобројних решења.

РЕШЕЊЕ: Јасно је да су x и y различите парности и да је $y^3 = x^2 + 5 > 0$. Ако је x непаран онда је $x^2 + 5 \equiv 2 \pmod 4$. Тај случај је немогућ, јер је тада y паран број, па је $y^3 \equiv 0 \pmod 4$. Ако је $x = 2p$ паран, а $y = 2q + 1$ непаран број, добијамо једначину $(2p)^2 + 1 = (2q + 1)^3$, односно $4p^2 + 5 = 8q^3 + 12q^2 + 6q^2 + 1$, па се после дељења са 2 добија $2(p^2 + 1) = 4q^3 + 6q^2 + 3q$. Како је десна страна једнакости дељива са q то мора бити и лева, па је $2(p^2 + 1) = кq$ $(к \in N)$. Добија се једначина $q(4q^2 + (6 - к)q + 3) = 0$. Очигледно $q \neq 0$, јер је тада $y = 2q + 1 = 1$, па је $x^2 + 5 = 1$.

Тада је $4q^2 + (6 - к)q + 3 = 0$ и решавањем добијене једначине по q^3 добија се $q_{1,2} = \dfrac{к - 6 \pm \sqrt{(к - 6)^2 - 48}}{8}$. Да би број q био цео мора дискриминанта бити потпун квадрат, тј. $(к - 6)^2 - 48 = D^2$. Решавањем добијене једначине по к и D добијају се вредности за које је q природан број. Дакле $q = 1$ или $q = 3$, па је $y = 3$ или $y = 7$. Тада је $x^2 + 5 = 27$ или $x^2 + 5 = 343$, па једначина нема целобројних решења. Δ

ПРИМЕР 74. *Да ли једначина* $x^2 + y^3 = z^4$ *има решења у: а) скупу простих бројева; b) скупу целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: а) Разликују се два случаја: $z = 2$ и $z > 2$.

Ако је $z = 2$, онда је $z^4 = 16 = x^2 + y^3$. Јасно је да је $y^3 < 16$, па је $y < 3$, дакле $y = 2$. Тада је $x^2 = 8$, па једначина нема решења.

Ако је $z > 2$, онда је z непаран, па је и z^4 непаран број. То значи да на левој страни једнакости један број мора бити паран, а један непаран.

Ако је $x = 2$, једначина постаје $4 + y^3 = z^4$, па се добија да је $(z^2 + 2)(z^2 - 2) = y^3$. Могућа су два случаја: $z^2 + 2 = y^3$ и $z^2 - 2 = 1$ или $z^2 + 2 = y^2$ и $z^2 - 2 = y$. Како се из првог система једначина добија $y^3 = 5$, а из другог $y^2 - y = 4$, то у овом случају нема решења у скупу простих бројева.

Ако је $y = 2$, онда је $x^2 + 8 = z^4$, тј. $(z^2 + x)(z^2 - x) = 8$, па је $z^2 + x = 4$ и $z^2 - x = 2$. Како је решење добијеног система $z^2 = 3$ и $x = 1$, закључујемо да једначина нема решења у скупу простих бројева.

b) Дата једначина је еквивалентна са $y^3 = z^4 - x^2 = (z^2 + x)(z^2 - x)$, па је једна од могућности $z^2 + x = y^2$ и $z^2 - x = y$. Решавањем добијеног систем следи да је $x = \dfrac{y(y-1)}{2}$ и $8z^2 = 4y^2 + 4y$, па је $8z^2 + 1 = (2y + 1)^2$. Ако се уведу смене $a = 2y + 1$ и $b = 2z$, добија се Пелова једначина $a^2 - 2b^2 = 1$. Како ова једначина у скупу целих бројева има бесконачно много решења, то и дата једначина има бесконачно много решења која се могу описати формулама

$$y_к = \frac{1}{4}\left((3+2\sqrt{2})^к + (3-2\sqrt{2})^к - 2\right);$$

$$z_к = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3+2\sqrt{2})^к - (3-2\sqrt{2})^к\right);$$

$$x_к = \frac{y_к(y_к - 1)}{2} \quad (\text{к је природан број}).$$

На пример нека од решења су: (0, 1, 1); (28, 8, 6); (1176, 49, 35) ...[251]

---

[251] Једначина је посебно третирана у скупу простих бројева, јер је решење дато у скупу целих бројева само једно од могућих решења.

ПРИМЕР 75. *Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^3 – 100 = 225y$?*

РЕШЕЊЕ: Како је $x^3 = 100 + 225y$ и како је десна страна дељива са 5 то мора бити и лева, па је $x = 5к$. Добија се $125к^3 = 100 + 225y$, а после дељења са 25 једнакост $5к^3 = 4 + 9y$ или $5к^3 – 5y = 4y + 4$. Сада је $5(к^3 – y) = 4(y + 1)$, па $y + 1$ мора бити дељиво са 5. Ако се $y = 5m - 1$ $(m \in N)$ замени у последњу једначину, онда се добија да је $к^3 = 9m – 1$. Да би $к^3$ био облика $9m – 1$, мора $к$ бити облика $3p - 1$. Следи да је $к^3 = (3p – 1)^3 = 9m – 1$ или $27p^3 – 27p^2 + 9p - 1 = 9m – 1$, тј $m = 3p^3 – 3p^2 + p$. Дакле, $x = 5к = 5(3p – 1)$ и $y = 5m – 1 = 5(3p^3 – 3p^2 + p) - 1$. За сваки цео број p добија се једно решење дате једначине што значи да једначина има бесконачно много решења. Δ

ПРИМЕР 76. *У скупу целих бројева решити једначину $x^4 - y^4 = z^2$.*

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са $y^4 + z^2 = x^4$ што значи да је (y^2, z, x^2) Питагорина тројка, тј. да постоје природни бројеви m и n такви да је:

1) $y^2 = 2mn$, $z = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 – q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = 4pq\,(p^2 – q^2)$.

Нека је $D(p, q) = d$. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $p = ad$ и $q = bd$. Следи да је $y^2 = 4pq\,(p^2 - q^2) = 4ad \cdot bd\,(a^2d^2 – b^2d^2) = 4ab \cdot d^4\,(a^2 – b^2)$.

Како је $y^2 = 4ab \cdot d^4\,(a^2 – b^2)$, то ће десна страна једнакости бити потпун квадрат ако је $ab \cdot (a^2 – b^2)$ потпун квадрат. Како су a и b узајамно прости бројеви, да би израз $ab\,(a^2 – b^2)$ био потпун квадрат потребно је да важи релација $a^2 – b^2 = к^2\, a{\cdot}b$, односно $a^2 - к^2a{\cdot}b – b^2 = 0$. Ако се добијена једнакост посматра као квадратна једначина по a, решавањем једначине се добија $a_{1,2} = \dfrac{к^2b \pm \sqrt{к^4b^2 + 4b^2}}{2} = \dfrac{к^2b \pm b\sqrt{к^4 + 4}}{2}$.

Да би a био природан број мора дискриминанта, тј. израз $к^4 + 4$ бити потпун квадрат. То је могуће само за $к = 0$, јер једначина $к^4 + 4 = p^2$ има јединствено решење $p = 2$, $к = 0$.

Ако је $к = 0$, онда је $a^2 – b^2 = к^2\, a{\cdot}b = 0$, па је $a = b$, што је противуречно претпоставци да су a и b узајамно прости природни бројеви.

2) $z = 2mn$, $y^2 = m^2 - n^2$ и $x^2 = m^2 + n^2$. Из последње једнакости следи да је сада (m, n, x) Питагорина тројка што значи да постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 – q^2$ и $x = p^2 + q^2$. Тада је $y^2 = \left|(p^2 – q^2)^2 - 4p^2q^2\right| = \left|p^4 + q^4 - 6p^2q^2\right|$.

Нека је $D(p, q) = d$. Тада постоје узајамно прости природни бројеви a и b такви да је $p = ad$ и $q = bd$. Следи да је $y^2 = d^4\left|a^4 + b^4 – 6a^2b^2\right| = d^4\left|(a^2 – b^2)^2 – 2a^2b^2\right|$.

Дакле, израз $\left|a^4 + b^4 - 6a^2b^2\right|$ мора бити потпун квадрат. Коришћењем метода дискриминанте се доказује да је то немогуће. Δ

7.6. ИРАЦИОНАЛНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

И код ирационалних Диофантових једначина нећемо се упуштати у посебна теоријска разматарања већ ћемо низом примера илустровати карактеристичне проблемске ситузације везане за ирационалне Диофантове једначине, уз напомену да се при решавању ирационалних Диофантових једначина мора водити рачуна о домену дефинисаности проблема.

ПРИМЕР 77. *Одредити све природне бројеве a, b и c за које је испуњена једнакост* $\sqrt{a+\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$.

РЕШЕЊЕ: Како су под коренима позитивне величине, квадрирањем се добија $a + \frac{b}{c} = \frac{a^2b}{c}$. Дата једначина је еквивалентна са $c = \frac{b(a-1)(a+1)}{a}$ $ac + b = a^2b$. Како је број a узајамно прост са (a – 1) и (a + 1) то мора бити b = aк (к ∈ N).

Следи да је $c = к(a^2 - 1)$, па је опште решење проблема дато формулама: $a = t$, $b = kt$; $c = к(t^2 - 1)$ $(к, t \in N; t \neq 1)$. Δ

ПРИМЕР 78. Одредити целобројна решења једначине $\sqrt{x-\frac{1}{5}} + \sqrt{y-\frac{1}{5}} = \sqrt{5}$.

РЕШЕЊЕ: Дата једначина је еквивалентна са $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5$, при чему је $5x - 1 \geq 0$ и $5y - 1 \geq 0$. Ако је $5x - 1 = a^2$ и $5y - 1 = b^2$, онда је $a + b = 5$. Како је $x = \frac{a^2+1}{5}$ и $y = \frac{b^2+1}{5}$, целобројне вредности x и y добијају се само ако a и b узимају вредности 2 и 3, па су једина решења дате једначине (1, 2) и (2, 1). Δ

ПРИМЕР 79. *Решити једначину* $\sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}} = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$ *у скупу позитивних рационалних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем полазне једначине добија се еквивалентна једначина $x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy} = 2\sqrt{3} - 3 > 0$, па је $x > y$. Ако се и лева и десна страна једнакости подели са $\sqrt{3}$ добија се $x + y - 2\sqrt{xy} = 2 - \sqrt{3}$. Даљим трансформацијама добија се $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$. Сада је због почетног услова $x > y$, очигледно $x = \frac{3}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$ Δ

<u>ПРИМЕР 80.</u> Дата је једначина $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2p}$, где је p прост број, а x и y природни бројеви. За које вредности p једначина има решење?

РЕШЕЊЕ: Квадрирањем се добија да је $x + 2\sqrt{xy} + y = 2p$. Ако је $xy = a^2$, онда је $x + y = 2p - 2a$, па су x и y решења квадратне једначине $t^2 - 2(p - a)t + a^2 = 0$. Да би решења $t_{1,2} = \dfrac{2(p-a) \pm 2\sqrt{(p-a)^2 - a^2}}{2}$ добијене једначине била целобројна, мора дискриминанта $p^2 - 2ap = p(p - 2a)$ бити потпун квадрат. Како је p прост број, то важи ако је $p - 2a = pк^2$ $(к \in Z)$ тј. ако је $a = \frac{p}{2}(1 - к^2)$. Тада је $x = \dfrac{p(к+1)^2}{2}$ и $y = \dfrac{p(к-1)^2}{2}$.

Како је $a > 0$, то је $1 - к^2 > 0$, па је $к = 0$. Тада је $x = y = \frac{p}{2}$. Једини прост број који је дељив са 2 је $p = 2$. Δ

<u>ПРИМЕР 81.</u> Одредити природне бројеве x, y и z тако да важи једнакост $\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}}_{y \text{ корена}} = z$.

РЕШЕЊЕ: Ако је $y = 1$, онда је $\sqrt{x} = z$, па је $x = к^2$, $y = 1$, $z = к$.

Нека је $y \geq 2$. Претпоставимо да је $x + \sqrt{x} = к^2$ $(к \in N)$. Како је $\sqrt{x} = к^2 - x$ и како су и к и x природни бројеви то је и број $\sqrt{x} = a$ природан број. Међутим, важи и неједнакост $x = (\sqrt{x})^2 < x + \sqrt{x} = к^2 < x + 2\sqrt{x} + 1 < (\sqrt{x} + 1)^2$. Како између квадрата два узастопна природна броја $(\sqrt{x})$ и $(\sqrt{x} + 1)$ нема потпуних квадрата добијена је противуречност, па једначина сем добијених, нема других решења. Δ

7.7. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Експоненцијалне Диофантове једначине заузимају важно место у раду са даровитима, јер њихово решавање је у суштини синтеза свих до сада реализованих метода. И у решавању експоненцијалних Диофантових једначина нема неких посебних алгоритама нити теоријских разматрања. Зато дајемо неколико занимљивих примера, јер ће они најбоље илустровати могуће методе.

<u>ПРИМЕР 82.</u> Одредити природне бројеве x и y тако да је $2^x + 1 = y^2$..

РЕШЕЊЕ: Како је $2^x + 1 = y^2$, то је $2^x = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$. Изрази $y - 1$ и $y + 1$ су исте парности, па је $y + 1 = 2^a$ и $y - 1 = 2^b$ $(a + b = x, a > b)$.

Одузимањем друге од прве једнакости добија се да је $2^a – 2^b = 2$. Следи да је $2^b (2^{a-b} – 1) = 2$. Сада је јасно да је $2^b = 2$ и $2^{a-b} – 1 = 1$, па је $b = 1$ и $a - b = 1$. Дакле, $a = b + 1 = 2$, па је $x = a + b = 2 + 1 = 3$. једино решење једначине је $x = 3$, $y = 2$. Δ

ПРИМЕР 83. *Одредити природан број x и прост број p тако да је $x^4 + 4^x = p$.*

РЕШЕЊЕ: Како је x природан број то је p паран број, ако је x паран и p је непаран број, ако је x непаран број. Како је p једини паран прост број, и како једначина $x^4 + 4^x = 2$ нема решења то значи да је x непаран број. Разликују се две могућности.

1) Ако је $x = 1$, онда је $x^4 + 4^x = 5$, па је $(x, p) = (1, 5)$ једно решење.

2) Ако је $x > 1$, онда је $x^4 + 4^x = x^4 + 2^{2x} = x^4 + 2^{2x} + 2x^2 2^к – 2x^2 2^к = (x^2 + 2^x)^2 – x^2 2^{x+1}$. Како је x непаран број, то је $x + 1$ паран број и добијени израз је у ствари разлика квадрата па је $(x^2 + 2^x + x2^{\frac{x+1}{2}})(x^2 + 2^x - x2^{\frac{x+1}{2}}) = p$. Како су за $x \geq 3$, очигледно оба фактора у производу већа од 1, то p није прост број.

Једино решење једначине је $(x, p) = (1, 5)$. Δ

ПРИМЕР 84. *Одредити целе бројеве x и y тако да је $2^x – 3^y = 7$.*

РЕШЕЊЕ: Како је $2^x - 3^y = 7$, то је $2^x = 3^y + 7 > 7$, па је $x \geq 3$. Тада су су могуће следеће ситуације:

1) Ако је $y = 0$, онда је $2^x = 8$, па је $x = 3$ и добија се решење $(3, 0)$.

2) Ако је $y > 0$, онда је $2^x = 3^y + 7$, то је $2^x \equiv (-1)^x \pmod 3$ и $3^y + 7 \equiv 1 \pmod 3$. Следи да је $2^x \equiv (-1)^x \equiv 1 \pmod 3$, па је x паран број. Из релације $3^y = 2^x - 7$, слично је $3^y \equiv (-1)^y \pmod 4$ и $2^x - 7 \equiv 1 \pmod 4$, односно $3^y \equiv (-1)^y \equiv 1 \pmod 4$, па је и y паран број. Дакле, $x = 2a$ и $y = 2b$. Тада је $2^{2a} - 3^{2b} = (2^a + 3^b)(2^a – 3^b) = 7$, па је $2^a + 3^b = 7$ и $2^a – 3^b = 1$. Следи да је $2 \cdot 2^a = 8$ и $2 \cdot 3^b = 6$, па је $a = 2$ и $b = 1$. Тада је $x = 4$ и $y = 2$.

3) Ако $y < 0$, онда је $2^x – 7 = 3^y$. Како је $2^x – 7 \geq 1$, $0 < 3^y < 1$, једначина у овом случају нема решења. Δ

ПРИМЕР 85. *Одредити целе бројеве x и y тако да је $2^x – 3^y = 5$.*

РЕШЕЊЕ: Како је $2^x - 3^y = 5$, то је $2^x = 3^y + 5 > 5$, па је $x \geq 3$. Тада се разликују следећи случајеви:

1) Ако је $y = 0$, онда је $2^x = 6$, па једначина тада нема решења.

2) Ако је $y > 0$, онда је $2^x = 3^y + 5$, то је $2^x \equiv (-1)^x \pmod 3$ и $3^y + 5 \equiv -1 \pmod 3$. Следи да је $2^x \equiv (-1)^x \equiv -1 \pmod 3$, па је x непаран број. Из релације $3^y = 2^x - 5$, слично је $3^y \equiv (-1)^y \pmod 4$ и $2^x - 5 \equiv -1 \pmod 4$, односно $3^y \equiv (-1)^y \equiv -1 \pmod 4$, па је и y непаран број. Дакле, $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$. Тада је $2^{2a+1} - 3^{2b+1} = 5 = 8 – 3$. Добија се једнакост $2^{2a + 1} – 8 = 3^{2b + 1} – 3$, па је $8(2^{2a-2} – 1) = 3(3^{2b} – 1)$. Једнакост је могућа у само два случаја:

2.1.) Ако је $2^{2a-2} - 1 = 3^{2b} - 1 = 0$, па је $2a - 2 = 2b = 0$. Следи да је $a = 1$, $b = 0$, па је $x = 3$ и $y = 1$.

2.2) Ако је парни део леве стране једнакости једнак парном делу десне стране и аналогно непарни део леве стране једнак непарном делу десне стране једнакости, онда је $8 = 3^{2b} - 1$ и $2^{2a-2} - 1 = 3$. Тада је $2b = 2$ и $2a - 2 = 2$, па је $a = 2$ и $b = 1$. Следи да је $x = 5$ и $y = 3$.

3) Ако $y < 0$, онда је $2^x - 5 = 3^y$. Како је $2^x - 5 \geq 1$, $0 < 3^y < 1$, једначина у овом случају нема решења. Δ

<u>ПРИМЕР 86.</u> Колико решења има Диофантова једначина $(2x)^{2x} - 1 = y^{z+1}$, *ако су* x, y *и* z *природни бројеви?*

РЕШЕЊЕ: Ако се једначина напише у облику $((2x)^x)^2 - 1 = y^{z+1}$ онда је она еквивалентна са једначином $((2x)^x - 1)((2x)^x + 1) = y^{z+1}$, а одавде је очигледно y непаран број. Тада је $(2x)^x + 1 = y^a$ и $(2x)^x - 1 = y^b$ при чему је $a + b = z + 1$. Ако се од прве једначине одузме друга добије се да је $y^a - y^b = 2$ или $y^b(y^{a-b} - 1) = 2$.

Како је y непаран број постоји само једна могућност $y^b = 1$, а $y^{a-b} - 1 = 2$. Дакле, $y^{a-b} = 3$, па је $y = 3$ и $a - b = 1$. Како је $y^b = 1$ то је $b = 0$, па је $z + 1 = a + b = 1$. Следи $z = 0$, што је немогуће, јер z мора бити природан број. Према томе једначина нема решења у скупу природних бројева. Δ

<u>ПРИМЕР 87.</u> Одредити све целе бројеве x, y и z, такве да је израз $4^x + 4^y + 4^z$ *потпун квадрат.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $4^x + 4^y + 4^z = a^2$ ($a \in N$). Приметимо да је лева страна једначине симетрична функција, што ће олакшати разматрање. Зато претпоставимо да је $x \geq y \geq z$. Разликује се неколико случајева:

1) Ако је било који од бројева x, y и z негативан једначина нема решења, јер лева страна једначине у том случају неће бити цео број.

1) Ако је $z = 0$, онда је $4^x + 4^y = a^2 - 1$, па је $4^y(4^{x-y} + 1) = (a + 1)(a - 1)$.

2.1) Ако је $y = 0$, онда је $4^x + 1 = a^2 - 1$. Очигледно је $4^x + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Ако је a непарно, онда је $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4$, а ако је a парно, онда је $a^2 - 1 \equiv -1 \pmod 4$. То значи да једначина у овом случају нема решења.

2.2.) Ако је $y > 0$, онда је лева страна једнакости паран број, па таква мора бити и десна. Дакле $a = 2p + 1$ ($p \in N$) и после срећивања се добија $4^y(4^{x-y} + 1) = 4p(p + 1)$, па следи $4^{y-1}(4^{x-y} + 1) = p(p + 1)$. Како је с десне стране једначине производ два узастопна броја, то мора бити и са леве, па је $4^{y-1} = 4^{x-y}$, односно $y - 1 = x - y$ или $x = 2y - 1$. Тада је $p = 4^{y-1}$, па је $a = 2p + 1 = 2 \cdot 4^{y-1} + 1 = 2^{2y-1} + 1$. Добија се бесконачно много решења једначине $(2к - 1, к, 0, 2^{2к-1} + 1)$.

2) Ако су x, y и z природни бројеви онда је $4^x + 4^y + 4^z = 2^{2x} + 2^{2y} + 2^{2z} = a^2$. Тада је $2^{2z}(2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1) = a^2 = 2^{2z} b^2$. Како је $2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1$ потпун квадрат мора бити $2^{2x-2z} + 2^{2y-2z} + 1 = 2^{2(x-z)} + 2\cdot 2^{x-z} + 1 = b^2$, па је $x - z + 1 = 2y - 2z$. Дакле $x = 2y - z – 1$. Ако је $y = m$, $z = n$, онда је $x = 2m – n – 1$ и враћањем у једначину добија се једно решење дате једначине $(2m – n -1, m, n; 2^n(2^{2m-n-1} + 1))$.

При овоме треба водити рачуна да су, због симетричности једначине, решења све пермутације скупа $(2m – n -1, m, n)$.

ПРИМЕР 88. Одредити све природне бројеве n тако да једначина $n^x + n^y = n^z$ *има бесконачно много решења, ако су x, y и z природни бројеви.*

РЕШЕЊЕ: Како су бројеви n^x и n^y исте парности то је њихов збир паран па и број n^z мора бити паран, што значи да је n паран број. Очигледно је $z > x$ и $z > y$, па се, не умањујући општост, може претпоставити да је $z > x \geq y$. Тада је једначина $n^x + n^y = n^z$ еквивалентна са једначином $n^y (n^{x-y} + 1) = n^z$ или $n^{x-y} + 1 = n^{z-y}$. Следи да је $n^{z-y} - n^{x-y} = 1$ или $n^{x-y} (n^{z-x} - 1) = 1$. Тада је $n^{x-y} = 1$ и $n^{z-x} - 1 = 1$, па је $x – y = 0$, а $n^{z-x} = 2$. Следи да је решење дате једначине $n = 2$ и $z – x = 1$. Значи да за $n = 2$ има бесконачно много тројки (x, y, z) таквих да $x = y = к$ и $z = к + 1$ које увек задовољавају једнакост: $2^к + 2^к = 2^{к+1}$. Δ

ПРИМЕР 89. Одредити све природне бројеве x и y такве да j $x^{y} = y^{x.}$

РЕШЕЊЕ: Приметимо одмах две чињенице: Тривијално решење једначине је $x = y$ и једначина је симетрична. Зато се, не умањујући општост, може препоставити да је $x \leq y$. Тада постоји ненегативан цео број a, такав да је $y = x + a$. Следи да је $x^{x+a} = (x + a)^x$. Одавде је $x^a = \left(\dfrac{x + a}{x}\right)^x$. Како је лева страна једнакости природан број то мора бити и десна, па је $x + a = y$ дељиво са x. Дакле $y = кx$ ($к \in N$). Тада је $x^{кx} = (кx)^x$. Тада је $x^к = кx$, па је $x^{к-1} = к$. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 1$, онда је $к = 1$, па је је $y = кx = x$. (тривијално решење)

2) Ако је $x > 1$ онда је и $к > 1$, па је:

2.1.) За $к = 2$, следи $x = 2$, па је $y = кx = 4$.

2.2.) Ако је $к \geq 3$, онда је $x^{к-1} – 1 = (x – 1)(x^{к-2} + x^{к-3} + ... + x + 1) \geq 2(к - 1) = 2к – 2$. Како је $2к – 2 > к - 1$, то је $x^{к-1} – 1 > к – 1$, па је $x^{к-1} > к$ и једначина нема више решења у скупу природних бројева.

Водећи рачуна о симетричности једначине закључујемо да су сва решења једначине $(x, y) \in \{(2, 4); (4, 2); (1, 1); (2, 2), (3, 3) ...\}$. То значи да једначина има бесконачно много решења Δ

7.8. ВЕЛИКА ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА[252].

На маргинама Диофантове "Аритметике" Ферма је написао 45 коментара. Најзначајнији Фермаов коментар је № II, у коме Ферма коментарише задатак II_8 из Диофантове ″Аритметике″ који се односи на опште решење Питагорине једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Поводом резултата који је добио Диофант, тј. чињенице да Питагорина једначина има бесконачно много целобројних решења, Ферма пише: ″Међутим, немогуће је куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и уопште никакав степен већи од квадрата, на два степена с истим таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ, но за њега су маргине ове књиге заиста мале″[253].

Ферма тада није ни слутио да ће се један његов коментар (хипотеза) претворити у проблем који је читавих 358 година задавао главобоље математичарима (и аматерима) који су покушавали да за једноставну теорему пронађу и елементаран доказ. Еволуција доказивања велике Фермаове теореме показује да је само доказ за $n = 4$ у сфери елементарне математике. Зато се овде даје доказ управо за $n = 4$, а значајно компликованији докази за $n = 5, 7, 11$ ... могу остати за самостално истраживање ученика или још боље за рад са даровитима у току студија.

<u>*ПРИМЕР 90.*</u> *Доказати да једначина* $x^4 + y^4 = z^4$ *нема решења у скупу природних бројева.*

РЕШЕЊЕ: Довољно је доказати да једначина $x^4 + y^4 = z^2$ нема решења, јер ако не постоји потпун квадрат, као збир два четврта степена, онда сигурно не постоји ни четврти степен.

Проблем решавамо методом "најмањег" решења.[254] Претпоставимо да проблем има решење, тј да постоје природни бројеви x_o, y_o и z_o такви да је $x_o^4 + y_o^4 = z_o^2$ и да је z_o најмањи природан број који задовољава дату релацију.

Ако је $x^4 + y^4 = z^{2,}$ онда се може претпоставити да су x, y и z у паровима узајамно прости и да је x паран, а y непаран број. Како су x^2, y^2 и z чланови основне Питагорине тројке, то постоје природни бројеви m и n такви да је $x^2 = 2mn$, $y^2 = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$.

Тада је $y^2 + n^2 = m^2$, па су сада y, n и m чланови нове основне Питагорине тројке. То значи да постоје узајамно прости природни бројеви p и q такви да је $y = p^2 – q^2$, $n = 2pq$ и $m = p^2 + q^2$. Тада је очигледно $x^2 = 2mn = 4pq (p^2 + q^2)$.

---

[252] О великој Фермаовој теореми је већ било речи у историјском осврту - видети поглавље 4.3. стр. 62-65.

[253] Видети [7.128.] : Диофант - ″Аритметика″, Москва, 1974. – стр. 197.

[254] И метод "најмањег" решења је већ обрађиван у поглављу 6.3.9.

С обзиром да су p и q узајамно прости, то су и pq и $p^2 + q^2$ узајмно прости. Да би број 4pq ($p^2 + q^2$) био потпун квадрат, мора сваки од фактора бити потпун квадрат, то јест морају постојати природни бројеви a, b и c, такви да је $p = a^2$, $q = b^2$ и $p^2 + q^2 = c^2$.

Тада је $p^2 + q^2 = a^4 + b^4 = c^2$, па бројеви a, b и c задовољавају полазну једначину $x^4 + y^4 = z^2$. Како је c очигледно мање од z_0, дошли смо до противуречности, са претпоставком, чиме је доказ завршен. Δ

*

Доказ велике Фермаове теореме за n = 3 извео је Ојлер још 1768. године, али је протекло преко сто година, када је Гаус доказао теоријске основе које је у свом доказу, не основано, користио Ојлер. Велику Фермаову теорему за n = 5 Лежен Дирихле је у јулу 1825. годне изложио у Парискoj академији наука, а Лежандр је у септембру 1825. године публиковао свој рад на исту тему. Свој доказ Дирихле је објавио 1828. године, али је он био веома сложен, и 1912. године га је значајно упростио Племељ. За следећи прост изложилац n = 7 доказ је извео Ламе 1839. године. Ламеов доказ касније је прилично усавршио Лебег.

И тако су се математичари читава три и по века бавили великом Фермаовом теоремом. У лето 1995. године у једном од престижних математичких часописа, "Математички анали", публикован је потпун доказ велике Фермаове теореме који је запремио цео број часописа (више од 100 листова). На тај начин, на крају 20. века, цео свет је признао, да је 358 година после свог настанка, велика Фермаова теорема, која је у суштини све то време била хипотеза, постала – доказана теорема. Енглески математичар Ендрју Вајлс, са сарадницима, је остварио своје дечачке снове. Доказао је велику Фермаову теорему, и ушао у историју.

7.9. ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ НА МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА.

Већина Диофантових једначина и проблема у овом раду су задаци са разних нивоа домаћих и иностраних такмичења. У завршном делу теоријских основа овог рада даје се још неколико таквих проблема са жељом да се истакну још неке, оригиналне идеје за њихово решавање – идеје које се нису могле уклопити у изложене теоријске оквире.

<u>ПРИМЕР 91.</u> Решити једначину $1! + 2! + \ldots + x! = y^z$, *ако су x, y, и z природни бројеви и* $z > 1$.[255]

---

[255] Задатак је са Савезног такмичења – Југославија 1974.

РЕШЕЊЕ: Разликује се неколико случајева:

1) Ако је $x = 1$, онда је очигледно (1, 1, к) решење једначине.

2) Ако је $x = 2$, онда је $3 = y^z$ и једначина нема решења.

3) Ако је $x = 3$, онда је $9 = y^z$, па једначина има решење (3, 3, 2).

4) Ако је $x = 4$, онда је $33 = y^z$ и једначина нема решења.

5) Ако је $x = 5$, онда је $153 = y^z$ и једначина нема решења.

6) Ако је $x = 6$, онда је $873 = y^z$ и једначина нема решења.

7) Ако је $x \geq 7$, онда се разликују следеће могућности:

7.1) Ако је $z = 2$, онда једначина постаје $1! + 2! + ... + x! = 33 + 10к = y^2$. Једначина нема решења, јер се квадрат природног броја никада не завршава цифром 3.

7.2) Ако је $z = 3$, онда је $1! + 2! + ... + 6! + 7! + ... + x! = 873 + 7к = y^3$. Како је $873 + 7к \equiv 5 \pmod 7$ и како је $y^3 \equiv 0 \pmod 7$, или $y^3 \equiv 1 \pmod 7$ или $y^3 \equiv 6 \pmod 7$, то једначина нема решења.

7.3) Ако је $z \geq 4$, онда је $1! + 2! + ... + 9! + ... + x! = 46133 + 81к = y^z$. Како је очигледно $46233 + 81к$ дељиво са 9, а није са 81, то је y^z дељиво са 3^2, а није са 3^z што значи да једначина нема решења. Δ

<u>ПРИМЕР 92.</u> Дата је једначина $xy + yz + zx - xyz = 2$. Одредити све уређене тројке (x, y, z) природних бројева x, y и z које задовољавају дату једначину.[256]

РЕШЕЊЕ: С обзиром да се ради о једначини која је симетрична, не умањујући општост може се претпоставити да је $x \leq y \leq z$. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $x = 1$, онда је $y + yz + z – yz = 2$, па је $y + z = 1$ и једначина има решење $x = y = z = 1$.

2) Ако је $x = 2$, онда је $2y + yz + 2z – 2yz = 2$. Тада је $2y + 2z – yz = 2$, па је $yz - 2y - 2z + 4 = 2$. Из добијене једначине је $(y – 2)(z - 2) = 2$ и једначина има решење $(x, y, z) = (2, 3, 4)$.

3) Ако је $x \geq 3$, онда је $xyz \geq 3xy$, $xyz \geq 3yz$ и $xyz \geq 3zx$, па се сабирањем добијених неједнакости добија $3xyz \geq 3(xy + yz + zx)$ или $xy + yz + zx - xyz \leq 0$ што је противуречно са условима задатка. То значи да једначина више нема решења.

Дакле, решења једначине су: (1, 1, 1); (2, 3, 4); (2, 4, 3); (3, 2, 4); (3, 4, 2); (4, 2, 3); (4, 3, 2).

<u>ПРИМЕР 93.</u> Одредити све парове (x, y) целих бројева који задовољавају једначину $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$.

---

[256] Задатак је са такмичења у Румунији 1978. године

РЕШЕЊЕ: Очигледно је да су x и y исте парности, па се може увести смена $x + y = 2a$ и $x - y = 2b$. Увођењем наведених смена дата једначина се трансформише у једначину $4a^3 + 4ab^2 = 8(3a^2 + b^2 + 1)$. Из $a(a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2) + 4a^2 + 2$ се трансформацијом добија $(a - 2)(a^2 + b^2) = 4a^2 + 2$. Како је $4a^2 + 2 > 0$, то мора бити и $a - 2 > 0$, па је $a > 2$. Како је $4a^2 + 2 < 5a^2 + 5b^2$ следи да је $(a - 2)(a^2 + b^2) = 4a^2 + 2 < 5(a^2 + b^2)$, па је $a - 2 < 5$. Према томе $a \in \{ 3, 4, 5, 6.\}$[257]

Целобројне вредности за b се добијају за $a = 5$, $b = \pm 3$. За добијене вредности a и b, добијају се и (x, y) парови: (8, 2) или (2, 8). Δ

<u>ПРИМЕР 94.</u> Одредити природне бројеве a, b и c, који испуњавају следеће услове: $a<b<c$, $ac = b^2$ *и* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1998}$.[258]

РЕШЕЊЕ: Једначина $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1998}$ еквивалентна је са једначином $1998(ab + bc + ca) = abc$, која, због услова $b^2 = ac$, постаје $1998(ab + bc + ac) = abc$. Како је $b \neq 0$, после дељења са b, добија се $1998(a + b + c) = ac$. Даљом трансформацијом добија се $9 \cdot 222(a + b + c) = ac = b^2$.

Да би лева страна једнакости била потпун квадрат мора важити једнакост $a + b + c = 222к^2$ ($к \in N$). Тада је $ac = b^2 = 3^2 \cdot 222^2 к^2$, па је $b = 666к$. Добија се $a + c = 222к^2 - 666к = 222к(к - 3)$. Очигледно су a и c решења квадратне једначине $x^2 - 222к(к - 3)x + 666^2к^2 = 0$. Да би једначина имала целобројна решења мора њена дискриминанта бити потпун квадрат. Из тог услова прво се добија вредност $к = 13$, а затим и решења: $a = 222к$, $b = 3 \cdot 222к$ и $c = 9 \cdot 222к$, тј. $b = 3a$, $c = 9a$. Δ

<u>ПРИМЕР 95.</u> Одредити све природне бројеве n такве да је $n^2 + 3^n$ *квадрат целог броја.*[259]

РЕШЕЊЕ: Нека је $n^2 + 3^n = m^2$, где је m неки природан број. Тада је очигледно $m > n$ и $3^n = m^2 - n^2$. Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је $n = 1$, онда је $m^2 = 4$, па је $m = 2$, $n = 1$.

2) Ако је $n = 2$, онда је $m^2 = 4 + 9 = 13$ и једначина нема решења.

3) Ако је $n = 3$, онда је $m^2 = 9 + 27 = 36$, па је $m = 6$, $n = 4$.

4) Ако је $n \geq 4$, онда је $(m + n)(m - n) = 3^n$, па је $m + n = 3^{n-к}$ и $m - n = 3^к$. Како је $m + n > m - n$ то $3^{n-к} > 3^к$, па је $n - к > к$. Из претходних релација добија се да је $2n = 3^{n-к} - 3^к$ или $3^{n-к} - 3^к - 2n = 0$. Како је је $n - к > к$, то функција $f(к) = 3^{n-к} - 3^к - 2n$ има најмању вредност када је $n - к = к + 1$, дакле када је $n = 2к + 1$.

---

[257] Задатак је са ИМО – Луксембург 1980. године

[258] Задатак је са Републичког такмичења – Србија 1998. године

[259] Задатак је са Балканске јуниорске олимпијаде – Македонија 2000. године

Тада је $3^{n-к} - 3^{к} - 2n = 3^{к+1} - 3^{к} – 2(2к + 1) = 3\cdot 3^{к} - 3^{к} – 2(2к + 1) = 2(3^{к} – (2к + 1))$. Неједнакост $3^{к} – (2к + 1) \geq 0$. важи само за $к = 1$, а тада је $n = 3$. Како је тај случај већ решаван, једначина нема више решења.[260]

<u>ПРИМЕР 96.</u> Одредити све природне бројеве a, b и c, такве да је $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.[261]

РЕШЕЊЕ: Како је $к^3$ конгруентно са -1, 0 или 1 по модулу 9, а $2001 \equiv 3 \pmod 9$ то значи да су бројеви a, b и c облика $3к + 1$. Тада је $a = 3x + 1$, $b = 3y + 1$, $c = 3z + 1$, па се добија симетрична једначина $3x^3 + 3y^3 + 3z^3 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 222$. Очигледно је да је бар један од бројева x, y и z мањи од 4 и да је $x + y + z$ дељиво са 3, па се кратким разликовањем случајева добија да је $x = y = 3$ и $z = 0$. Решење једначине је (10, 10, 1) и, због симетрије једначине, све пермутације добијене тројке. Дакле, скуп решења једначине је: {(10, 10, 1); (10, 1, 10); (1, 10, 10)}. Δ

<u>ПРИМЕР 97.</u> Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x^y + y = y^x + x$.[262]

РЕШЕЊЕ: Једначина је очигледно симетрична и зато је (к, к) тривијално решење дате једначине и за свако решење (x, y) добија се и решење (y, x). Разликује се неколико случајева:

1) Ако је $x = 1$, онда је $1 + y = y + 1$, па се добијају решења (1, к) и (к, 1) ($к \in N$).

2) Ако је $x = 2$, онда је $2^y + y = y^2 + 2$. Тада је $2^y – 2 = 2(2^y – 1) = y(y – 1)$. Како су y и $y – 1$ узајамно прости то је могуће или $y = 2$ или $y – 1 = 2$, односно $y = 3$. Дакле нова решења су (2, 3) и њему симетрично (3, 2).

3) Ако је $x > 2$, онда се без умањивања општости може претпоставити да је $2 < x < y$. Тада постоји природан број a такав да је $y = x + a$. Из услова $x^y + y = y^x + x$ тј. $x^{x+a} + x + a = (x + a)^x + x$ добија се $x^a + \frac{a}{x^x} = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$. Како је $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x < 3^a$, то је $x < 3$, па једначина нема више решења у скупу природних бројева. Δ

7.10. НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ ДИОФАНТСКИ ПРОБЛЕМИ

На крају овог поглавља даје се неколико интересантних Диофантових проблема као илустрација могућих примена Диофантових једначина на решавање проблема из других области математике и решавање проблема из свакодневне праксе.

---

[260] Добијена неједнакост се може доказати и елементарно, а може и математичком индукцијом.

[261] Задатак је са Балканске јуниорске олимпијаде – Кипар 2001. године

[262] Задатак је са Савезног такмичења – Југославија 2001.

<u>ПРИМЕР 98.</u> *Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О ком броју је реч? Колико има решења?*

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy} = 10x + y$. Тада је очигледно $10x + y + 10y + x = 11(x + y) = к^2$ или $x + y = \frac{k^2}{11} \leq 18$. Како је x + y природан број то је $к^2$ дељиво са 11 и $к^2 < 198$. Значи да је $к^2 = 121$, па је к = 11. Тада је x + y = 11, па су сва решења датог проблема бројеви: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92. Δ

<u>ПРИМЕР 99.</u> *Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?*

РЕШЕЊЕ: Нека су тражени троцифрени бројеви x и y. Тада због услова задатка важи једнакост: $1000x + y = 3xy$. Одавде је $9xy - 3y - 3000x + 1000 = 1000$ или $3y(3x - 1) - 1000(3x - 1) = (3x - 1)(3y - 1000) = 1000$. Како је x троцифрен број, то је $x \geq 100$, па је $3x \geq 300$, а $3x - 1 \geq 299$. Дакле, постоје само две могућности:

1) $3x - 1 = 1000$, или $3x = 1001$, што није могуће, јер 1001 није дељиво са 3.

2) $3x - 1 = 500$, или $3x = 501$, а $x = 167$. Тада је $3y - 1000 = 2$, па је $y = 334$. Дакле, тражени троцифрени бројеви су x = 167 и y = 334. Δ

<u>ПРИМЕР 100.</u> *Одредити све природне бројеве чија је вредност у декадном систему једнака збиру квадрата цифара тог броја.*

РЕШЕЊЕ: Разликују се следећи случајеви:

1) Ако је тражени број једноцифрени број x, онда је $x = x^2$, па је x = 1.

2) Уколико је тражени број двоцифрен онда је $10x + y = x^2 + y^2$, што је еквивалентно са $x(10 - x) = y(y -1)$. Како је $y(y - 1)$ паран број, то је и x парна цифра. За $x \in\{2, 4, 6, 8\}$ број $x (10 - x)$ је једнак или 18 или 24, а они очигледно не представљају производ два узастопна природна броја.

3) Ако је тражени број троцифрен, онда је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$. Како је $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \cdot 81 = 243$, то је x = 1 или x = 2.

3.1) Ако је x = 1, онда је $100 + 10y + z = 1 + y^2 + z^2$ или после сређивања $99 + 10 y + z = y^2 + z^2$. Како је $99 > z^2$ и $10y > y^2$, то је лева страна увек већа од десне па једначина нема решења.

3.2) Ако је x = 2, онда је $200 + 10y + z = 4 + y^2 + z^2$. Лева страна једнакости је увек већа од 200, а десна увек мања од 200, па једначина нема решења.

4) Уколико је број цифара већи од 3 и једнак к, онда је тражени број увек већи од $10^{к-1,}$ а збир квадрата његових цифара мањи од 100к, па је једнакост могућа само ако је $10^{к-1} \leq 100к$, или $10^{к-3} \leq к$, што је немогуће, јер добијена неједнакост не важи ни за једно к веће од 3. Δ

ПРИМЕР 101. *Под је поплочан подударним правилним многоугловима исте врсте. О којим многоугловима је реч?*

РЕШЕЊЕ: Нека тражени правилни полигон има m страница и нека се n таквих полигона сустичу у једном темену. Како је један угао правилног многоугла једнак $\frac{(m-2)180^o}{m}$ то је $n \cdot \frac{(m-2)180^o}{m} = 360^o$. Добија се Диофантова једначина $n(m-2) = 2m$ или $nm - 2n - 2m = 0$. Одавде је $nm - 2n - 2m + 4 = 4$ или $(n - 2)(m - 2) = 4$, па су могући следећи случајеви:

1) $n - 2 = 1$ и $m - 2 = 4$, па је $n = 3$ и $m = 6$;

2) $n - 2 = 2$ и $m - 2 = 2$, па је $n = 4$ и $m = 4$;

3) $n - 2 = 4$ и $m - 2 = 1$, па је $n = 6$ и $m = 3$;

Дакле, могуће је поплочавање равни са 3 правилна шестоугла који су сусрећу у истом темену, са 4 квадрата или са 6 једнакостраничних троуглова Δ

ПРИМЕР 102. *Одредити све природне бројеве чији је квадрат једнак петом степену збира његових цифара.*[263]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број n и нека он има к цифара (к ∈ N). Нека је збир цифара броја n једнак S. Тада је $10^{к-1} \leq n < 10^к$ и $S \leq 9к$, а из услова задатка је $n^2 = S^5$. Очигледно важи неједнакост: $(9^{к-1})^2 < (10^{к-1}) \leq n^2 = S^5 \leq (9к)^5$.

Дакле, $9^{2к-2} < 9^5 \cdot к^5$. Следи да је $9^{2к-7} < к^5$. Дата неједнакост важи за само неколико бројева $к \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Да је за $к \geq 6$ број $9^{2к-7} > к^5$, најлакше се доказује математичком индукцијом.

Ако је $к \leq 5$, онда је $S \leq 45$. Како је $n = S^2\sqrt{S}$ то S мора бити потпун квадрат. Дакле, $S \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Тада је $n \in \{1, 32, 243, 1024, 3125, 46656\}$. Збир цифара броја n је заиста S само за бројеве 1 и 243. Δ

ПРИМЕР 103. *Познато је да је $36 = 6^2 = 1 + 2 + ... + 8$, односно да је истовремено и квадратни и троугаони број. Да ли је троугаоних бројева који су истовремено и потпуни квадрати има коначно или бесконачно много?*

---

[263] Задатак је са савезног такмичења – Југославија 1977. године

РЕШЕЊЕ: Нека је $1 + 2 + ... + x = y^2$. Тада је $x(x + 1) = 2y^2$. Множењем дате једначине са 4 добија се $4x^2 + 4x + 1 = 8y^2 + 1$. Ако уведемо смену $2x + 1 = a$, $2y = b$, једначина се своди на Пелову једначину $a^2 - 2b^2 = 1$.

Како једначина $a^2 - 2b^2 = 1$ има бесконачно много решења, то постоји бесконачно много троугаоних бројева који су истовремено и квадратни. Следећа таблица даје нека од могућих решења:

a	b	x	y	Квадратни – троугаони број
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900
114243	80782	57121	40391	1631432881
665857	470832	332928	235416	55420693056
3880899	2744210	1940449	1372105	1,88267E+12
22619537	15994428	11309768	7997214	6,39554E+13
131836323	93222358	65918161	46611179	2,1726E+15
768398401	543339720	384199200	271669860	7,38045E+16
4478554083	3166815962	2239277041	1583407981	2,50718E+18

Иначе сва решења проблема су дата формулама:

$$2x_к + 1 = \frac{1}{2}\left((3 + 2\sqrt{2})^к + (3 - 2\sqrt{2})^к\right)$$

$$y_к = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left((3 + 2\sqrt{2})^к - (3 - 2\sqrt{2})^к\right) \Delta$$

<u>ПРИМЕР 104.</u> Постоји ли троцифрен природан број који је једнаак квадрату броја x, а чији је збир цифара једнак x – 1? [264]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Из услова задатка је $100x + 10y + z = x^2$ и $x + y + z = x – 1$, па се одузимањем једначина долази до релације $99x + 9y = x^2 – x + 1$. Тада постоје три случаја:

---

[264] Задатак је са Републичког такмичења – Србија 1979. године

1) Ако је $x = 3к$, онда је $9(11x + y) = 9к^2 – 3к + 1$, па једначина нема решења јер је лева страна дељива са 3, а десна није.

2) Ако је $x = 3к + 1$, онда је $9(11x + y) = 9к^2 + 3к + 1$, па једначина нема решења јер је лева страна дељива са 3, а десна није.

3) Ако је $x = 3к+2$, онда је $9(11x + y) = 9к^2 + 9к + 1$, па једначина нема решења јер је лева страна дељива са 9, а десна није. Δ

ПРИМЕР 105. *Одредити све природне бројеве мање од 1000 који су једнаки збиру факторијела својих цифара.* [265]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Према условима задатка мора бити $\overline{xyz} = 100x + 10y + z = x! + y! + z!$.

Јасно је да је $x! + y! + z! < 1000$, па је сваки од бројева x, y и z, мањи од 7, јер када би био 7 или већи од 7, тада би број $x! + y! + z!$ био већи од 5040.

Међутим, ни један од бројева x, y и z не сме бити ни 6, јер би тада број $x! + y! + z!$ био већи од 720, па би цифра x била 7, што није могуће.

Ако су бројеви x, y и z, мањи од 6, онда је $x! + y! + z! \leq 3 \cdot 5! = 360$, па је очигледно цифра $x \leq 3$, а број $x! + y! + z! \leq 246$. Следи да је $x \leq 2$, па је $x \in \{0, 1, 2\}$.

1) Ако је $x = 0$, онда је $1 + y! + z! = 10y + z < 100$, па су y и z мањи од 5, јер када би били већи од 4 њихов збир би био већи од 100. Провером се долази до закључка да су једина решења тада $x = y = 0$, $z = 1$ и $x = y = 0$, $z = 2$.

2) Ако је $x = 1$, онда тачно један од бројева y и z мора бити 5, па у обзир долазе само бројеви: 105, 115, 125, 135, 145, 150, 151, 152, 153 и 154. Закључује се да је једино решење $145 = 1! + 4! + 5!$.

3) Ако је $x = 2$, онда је $y = z = 5$, јер само тако је број $x! + y! + z!$ већи од 200. Међутим, 255 није решење јер је $2! + 5! + 5! = 242$.

Дакле једина решења су: 1, 2, 145. Δ

ПРИМЕР 106. *Постоји ли природан број чији се квадрат може приказати као збир квадрата четири узастопна природна броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $x^2 + (y + 1)^2 + (y + 2)^2 + (y + 3)^2 = x^2$. Тада се добија једначина $4y^2 + 12y + 14 = x^2$ или $x^2 - 4y^2 – 12y – 9 = 5$. Следи да је $x^2 – (2y + 3)^2 = 5$, па је $(x + 2y + 3)(x – 2y – 3) = 5$. Како је x веће од $2x + 3$, једина могућа решења се добијају ако је $x + 2y + 3 = 5$ и $x – 2y – 3 = 1$. Тада је $x = 3$ и $2y + 3 = 2$, па $y = -\frac{1}{2}$ није цео, већ рационалан број.

---

[265] Задатак је са Савезног такмичења – Југославија 1985. године

Интересантно је да проблем у скупу рационалних бројевима има решење, јер је $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2$ и могао би се преформулисати у следећи: Дата су четири рационална броја x, x+1, x+2 и x+3. Збир њихових квадрата је квадрат целог броја. О којим бројевима је реч?

Тако формулисан проблем има и друго решење, али се одмах намеће и друга формулација горњег проблема: Одредити четири узастопна непарна цела броја тако да је збир њихових квадрата квадрат неког целог броја. Δ