"Оно што је била Александријска
библиотека за Античку цивилизацију,
данас је за савремени свет Интернет".

Из једног текста о Интернету

8. РАЧУНАРИ И ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Овај део рада има за циљ да прикаже шта рачунари, без којих је данас тешко замислити и један сегмент савременог живота, могу допринети у раду са даровитим математичарима уопште, а затим посебно у области Диофантових једначина. Зато ћемо у овом поглављу покушати да одговоримо на питања како се све рачунари могу користити у раду са младим математичарима, шта све рачунари могу у области Диофантових једначина, а шта не могу, када их је рационално користити, а када није.

8.1. УЛОГА РАЧУНАРА У РАДУ СА ДАРОВИТИМА

О учењу уз помоћ рачунара већ је било наговештаја[266] у овом раду. Теме које су тамо само наговештене сада детаљније анализирамо.

8.1.1. ДАРОВИТИ И ИНТЕРНЕТ

Интернет је данас највећа база података на свету. За младог човека који има намеру да се озбиљно бави математиком на Интернету се може наћи буквално све што га интересује, а претраживањем по Интернету ће наћи и оно што није ни претпостављао да му треба, а што ће се испоставити да му је очигледно важно. Не постоји ниједан математички појам, ниједан познати математичар, а да се путем неког од претраживача о томе на Интернету не нађе на стотине референци са хиљадама страница текста и десетинама веома употребљивих информација, текстова, радова, ... За даровите су уз многобројне информације доступне на Интернету, од највеће важности чини се неколико група података: подаци о појединим математичким појмовима, подаци о великим историјским именима у математици, електронска издања часописа, електронска издања књига и подаци који упућују и третирају рад са даровитим математичарима.

<u>Математички појмови</u> се на Интернету доста лако налазе, без обзира за ког се претраживача определите и да ли тражите стриктни појам, или теоријске поставке везане за тај појам. Оно што треба знати је, да је најбоље узети што ужи појам, јер општи појмови имају превелик број референци.[267]

---

[266] У поглављу 3 – видети – интерактивно учење и видети текст [8.160.]

[267] Ако се, на пример, на претраживачу GOOGLE пријави појам троугао, онда се добије ни мање ни више него 15.400.000 страница, распоређених на више од 1000 сајтова

За математичка претраживања интересантан је сајт Википедија,[268] као универзална енциклопедија која је конституисана на многим светским језицима. Тако на енглеском, француском, немачком и јапанском језику има више од 100.000 референци, а на многим језицима, међу којима је и српски, има преко 10.000 базичних података.

Оно што је важније од броја базичних података је да се за сваки појам који је присутан у Википедији у самом објашњењу одреднице која се тражи даје низ линкова на истом језику. Међутим, оно што је и од тога важније је да постоји опција за све оно што је присутно у Википедији, а што је повезано са појмом који се тражи. Највеће богатство овог претраживача је што се са било ког језика може пребацити, по истој одредници, на неки други језик и то директним линком, а организација података на свим језицима је скоро идентична. Чини се да је најбогатија понуда на енглеском језику, јер о појму који се разматра има толико података, да је једина брига онога ко тражи како да добијене податке класификује. Поред интерних линкова, у самој одредници, дати су подаци о везама траженог појма са осталим математичким појмовима, теоријама, личностима ... За оне који хоће детаљније упознавање са појединим теоријским питањима Википедија је слаб извор информација и зато на крају сваке одреднице постоје екстерни линкови. Википедија своје клијенте упућује на неколико линкова од којих су најрепрезентативнији сајтови: MathWorld и PlanetMath.[269]

На овим сајтовима поред детаљних података о скоро сваком, па и најситнијем детаљу везаном за тражени појам или математичку теорему, теорију ... могу се наћи и нови интерни линкови за све што тражи одређена појашњења. Осим тога дати су и библиографски подаци са конкретним линковима ка одређеној литератури у електронској форми, тако да је скоро невероватно да за област елементарне математике онај који претражује не нађе на Интернету оно што га интересује.

Ово је само један пример приступа појмовима, теоријама, а сваки даровити ученик ће сигурно врло брзо пронаћи и свој аутентични пут долажења ди информација које су му неопходне, било разменом искустава са другима, било сталним коришћењем Интернета и прављењем сопствених линкова према најзначајнијим светским базама математичких података.

Историја математике је према подацима који се добијају коришћењем најпознатијих претраживача (Google, Yahoo, Krstarica) веома присутна на Интернету.[270] Без премца за ову област свакако је сајт MT(The Mac Tutor History of Mathematics archive).[271]

---

[268] Видети: http://en.wikipedia.org/wiki/

[269] Видети http://mathworld.wolfram.com/ и http://planetmath.org/encyclopedia/

[270] Ова три претраживача нуде у просеку око 30.000.000 страница из историје математике

[271] Видети сајт: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/

Сајт су креирали професори John J O'Connor и Edmund. F. Robertson и сајт се редовно одржава и ажурира. Сајт садржи биографски индекс и то у две варијанте: по абецеди и по епохама. За сада су обухваћене биографије преко две хиљаде најзначајнијих математичара у историји цивилизације а за један број математичара је дата и њихова фотографија или цртеж са њиховим ликом. Посебно су индексиране жене у математици, а постоји и хронолошки индекс који почиње са Ахмесом из 1680 године п.н.е. и за сада се завршава норвешким математичарем Ореом који је умро 1968. године.

Иначе, свака биографска одредница садржи низ интерних линкова који упућују на личности и проблеме везане за онога о коме се говори. На крају сваке одреднице дат је списак литературе на основу које је припремана биографија, цитати који су коришћени у припреми текста, научников постер (ако постоји) и попис свих математичара који су из његове земље присутни на сајту. Од необавезних прилога ту су скенирани делови неких радова (ако су сачувани), а зависно од важности математичара ту је и читав низ других линкова који указују на најважнија подручја интересовања, радове и проблеме математичара и теме и проблеми који су обрађени на сајту, а имају везе са научником о коме се говори, а чак и посебне сајтове о тим математичарима (ако постоје).[272]

Сајт садржи још једну хронологију, а то је хронологија значајних година у историји математике која реално почиње са Вавилонцима 3000 година п.н.е, а завршава се са 2000. годином.

Други значајни индекс који садржи сајт су теме из историје математике које су такође класификоване на два начина: по културама и по математичким дисциплинама, тако да је могуће претраживање и по једном и по другом критеријуму. Овај део сајта се очигледно још развија, тако да је могуће очекивати и нових значајних прилога о разним математичким цивилизацијама и проблемима с обзиром да су за сада обрађене углавном древне цивилизације и класични математички проблеми.

Сајт садржи и свој сопствени, додуше Google претраживач, али се претраживање може извршити и изван њега. Тако, на пример, лако можете идентификовати све математичаре који су рођени или умрли на дан претраживања, али помоћу календара на сајту и за ма који други дан у години. Има и других интересантних података.

Ту је и листа свих релевантних математичких институција у свету, по абецедном и хронолошком реду, од Платонове академије из 387. године п.н.е. до Литванске академије наука која је последња регистрована институција (1993. године). Сајт садржи и листу од тридесетак најзначајнијих линкова за историју математике у свету која сваком посетиоцу сајта може помоћи да оно што не нађе на овом сајту потражи на неком од препоручених.

---

[272] У том смислу је нтересантан сајт А.Н. Колмогорова: http://kolmogorov.com/

На Интернету се могу претраживањем наћи и сајтови који препоручује све сајтове везане за историју математике или имају линкове према таквим сајтовима,[273] тако да и њих свакако треба имати у виду, као и све остале сличне сајтове који могу донети релевантне информације из историје математике. На пример, на руском језику постоји на Интернету историја математике у три тома.[274]

Математички часописи за рад са обдаренима су такође од великог значаја и њихових садржаја има и на Интернету. Свакако најпознатији светски часопис за младе математичаре је "Квант" који је у доброј мери доступан даровитима и преко Интернета, јер је преко тридесет годишта часописа могуће користити у електронској форми.[275]

Међутим, на Интернету се могу наћи и други математички часописи за младе, као што су хрватски Matematičko-fizički list, мађарски KöMaL, енглески Plus Magazine, пољска Delta, амерички Journal of Online Mathematics and its Applications, холандски Pythagoras[276] и други часописи са интересантним садржајима за даровите.

У последњих неколико година све чешћи су електронски часописи за даровите који су прилагођени свакодневној употреби и чији садржаји се лако меморишу и штампају тако да их млади са задовољством користе.[277]

Математичка литература је главни ослонац у раду сваког младог човека који улази у свет науке. Електронских библиотека има и на Интернету, али је утисак да је више таквих библиотека дато у виду каталога, него у форми Интернет библиотека. Очигледно је да су комерцијални разлози учинили своје и зато је на Интернету значајно мање електронских књига него неких других издања.

Од онога што би се могло препоручити младима сигурно су две добро опремљене Интернет библиотеке. Прва је Internet Mathematics Library[278] и садржи доста илустративног материјала почев од научних тема, преко наставних тема до самог дидактичког материјала за наставнике (и ученике на разним нивоима).

Права Интернет библиотека је сјајно осмишљена руска електронска серија која садржи заиста капитална математичка издања.[279] У око 300 књига обухваћено је неколико најзначајнијих руских библиотека које и данас представљају најквалитетнију литературу за младе математичаре широм света. Ту су књиге из добро знаних серија "Библиотека математичког кружока", Библиотеке "Квант" и Библиотеке "Збирке олимпијских задатака".

---

[273] Видети сајтове: www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/Links/ или http://homepages.bw.edu/~dcalvis/history.html

[274] Видети: http://ilib.mirror0.mccme.ru/djvu/istoria/istmat3.htm

[275] Све о Кванту видети на адреси: http://kvant.mirror0.mccme.ru/

[276] Видети линк усмерен на ове часописе на сајту www.math.hr/~mathe/

[277] Видети словенчаке и хрватске електронске часописе: www.math.hr/~mathe/

[278] Видети: http://mathforum.org/library/

[279] Видети одговарајући линк на сајту: http://www.mccme.ru/

Поред већ наведених публикација ту се могу наћи и сјајне књиге из геометрије, серија књига о занимљивој математици Перељмана и непревазиђене књиге за даровите Шкљарског, Ченцова и Јаглома,[280] разне математичке енциклопедије, и друга значајна математичка издања. Све књиге се могу прекопирати са Интернета, а могу се узети и само они фрагменти који су тренутно потребни.

Сајтови за обдарене су врло моћни информациони системи који, иако нису жива бића, даровитима пружају огромне могућности за (интер)активни рад у смислу сталног коришћења информација који се на њима налазе, решавања проблема који се са сајтова узимају и сталног праћења нових информација.

Даровитима који су уз то и такмичари од највеће важности ће свакако бити два сајта ИМО. На првом, канадском, [281] су дате најважније информације о ИМО, њиховој историји, организацији, резултатима, задацима, па чак и будућим организаторима ИМО и многим другим појединостима везаним за до сада одржаних 46 ИМО. Међутим, исто тако важан део сајта је онај који садржи линкове према сајтовима земаља учесница ИМО на којима се могу наћи веома занимљиви подаци о раду са младима у тој земљи и задаци са њихових такмичења, олимпијских припрема и друге интересантне појединости.

Други, холандски сајт,[282] није толико илустративан када су у питању информације са међународних олимпијада, али је веома интересантан због брзог и сигурног доласка до задатака са регионалних и националних математичких олимпијада широм света.

Важни сајтови су свакако и они који говоре о руским и америчким математичким олимпијадама,[283] као и они који су мање чувени, али не и мање садржајни. Такви су украјински и амерички сајт, од којих први садржи решене задатке са ИМО и многих националних и регионалних олимпијада, а други огроман број архивираних такмичења са разних страна света.[284]

Међутим, постоје и целовити сајтови намењени раду обдарених људи и њихових наставника на сопственом математичком усавршавању. Поменућемо само један, заиста вредан сајт такве врсте. То је сајт Московског центра за континуирано математичко образовање (МЦНМО).[285] На њему просто нема шта нема, а већ смо помињали електронску верзија велике Интернет библиотеке, часопис "Квант" и разне математичке олимпијаде.

---

[280] У оригиналу: Шклярский, Ченцов и Яглом

[281] Видети: http://imo.math.ca/

[282] Видети: http://olympiads.win.tue.nl/imo/

[283] Видети: http://www.unl.edu/amc/ http://www.mccme.ru/olympiads/

[284] Видети: http://www.kalva.demon.co.uk/ и http://archives.math.utk.edu/contests/

[285] Видети: http://www.mccme.ru/

На сајту се налазе обавештења о раду математичких кружока и теме које се раде; информације о летњим школама, дописним школама, и разним математичким турнирима; базе података са обиљем разних математичких проблема класификованих по разредима, нивоима областима, подобластима. ... Једном речју право математичко богатство. Колико за талентоване ученике, још више за њихове наставнике који на сајту могу наћи много изванредног материјала за рад са својим ученицима.

Сигурно је да на Интернету постоје и други значајни сајтови и информације, а за даровите је најважније да брзо и лако дођу до потребних информација. Зато је обука за коришћење Интернета исто један јако озбиљан и важан образовни задатак за сваког наставника који ради са математичким талентима.

8.1.2. РАЧУНАР КАО СРЕДСТВО КОМУНИКАЦИЈЕ

Интерактивно учење се данас сматра за облик учења који има висок степен активности свих учесника у процесу учења. Рачунар може бити значајан фактор те активности и доприносити бржој комуникацији и квалитетнијој размени података, без обзира да ли се ради о комуникацији ученик-професор, ученик-ученик или некој трећој врсти комуникације.

Шта се обичном e-mail комуникацијом може добити?

Професор може направити виртуелну учионицу и скоро свакодневно дозирати проблеме којима ће привлачити пажњу ученика. Не би било добро да то увек буду само "голи" задаци, чије се решење тражи. Наравно, биће и тога, али се електронском поштом може доставити и текст који треба проучити да би се могли решавати проблеми, или истраживачки упит везан за нешто што једноставно треба открити (иако је то откривено пре више стотина година). Рачунар једноставно омогућује наставнику да му наставни план и програм нису препрека, а број часова ограничавајући фактор. У оваквом раду разредно-часовни систем не представља никакав проблем, јер професор за своје ученике има онолико времена колика су њихова интересовања.

Ученици могу слати решења проблема. Али и питати о задацима које нису могли да реше или о теоријским проблемима које нису до сада упознали. Радозналост је једна од најзначајнијих карактеристика даровитости. И због тога наставник мора бити припремљен на сталне упите. Интерактиван рад разбија илузију да је наставник свезнајући, јер ће понекад ученици решити и оно што он није успео да реши. Ученици ће много боље комуницирати и пријатније се осећати када та комуникација буде дефинисана као заједничко трагање за неким новим знањима. Рачунар је ту да прекрати време до следећег часа, јер се у међувремену може још много тога интересантног урадити, открити, поставити, пронаћи на разним математичким сајтовима који су доступни на Интернету.

Комуникација ученик-ученик је нешто што обогаћује комуникацију ученик-наставник. Електронски форум[286] је зато добро решење, јер је онда све пред свима и сви добијају све поруке, дакле све задатке, решења, све резултате, текстове, линкове, информације, поруке ... и сви деле радост решења, открића, доброг резултата. Тиме ће се добити и да се неки проблем реши на више начина, али и да једна нереализована идеја неком послужи за реализацију своје идеје.

Рачунар је и могућност да наставник своје вансеријске ученике повеже са другим младим и талентованим људима, али и колегама са универзитета и другим математичарима који могу бити од користи у правилном и динамичном развоју сваког даровитог ученика.

8.1.3. РАЧУНАР КАО ЛИЧНА БАЗА ПОДАТАКА

Добро је користити рачунар за учење путем Интернета и сврсисходну комуникацију са колегама и наставницима, али је оправдано имати и сопствену базу података која може бити конструисана сасвим оригинално, али обавезно систематично, јер од функционалности базе зависи и брзина долазака до података из сопствене базе.

Фолдери могу бити дефинисани на пример као области елементарне матема-ике: алгебра, геометрија, теорија бројева, комбинаторика ... Сваки од фолдера се даље грана у нове области а у подфолдерима теорије бројева поред дељивости, простих бројева, конгруенција ... су и Диофантове једначине.

Садржаји базе података су текстови са Интернета класификовани по одређеном критеријуму, али и скенирани чланци из часописа, скенирани текстови из књига и други текстуални прилози. У бази се могу наћи и подаци о ауторима и књигама и часописима у којима се налазе важни и добри текстови.

Подаци о важним сајтовима и њиховим садржајима, као и могућим линковима су такође важни за рад на било ком проблему, као и Интернет адресе људи с којима комуницирамо. У рачунару се могу наћи и разни интересантни математички проблеми и идеје за њихово решавање, резултати такмичења и све оно што је, као на пример драга музика, фотографије, ... интересантно за младог човека, а што се систематски похрањује у своју личну интерну базу података.

Наравно у рачунару има увек места за инсталацију сопственог, макар само, интерног сајта на коме је све то систематски приказано, као и меморисање најзначајнијих линкова ка сајтовима који се најчешће користе.

---

[286] Аутор овог рада са својим ученицима и колегама комуницира путем форума који има адресу: spec-mat-vg@yahoogroups.com

8.2. РАЧУНАРИ И ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Све већ речено на општем нивоу о коришћењу рачунара за квалитетнији рад са даровитима и њихово брже напредовање, важи и за рад на реализацији садржаја о Диофантовим једначинама. Међутим, однос рачунари - Диофантове једначине има и својих специфичности које проистичу управо из чињенице да су основни предмет интересовања и једног и другог субјекта бројеви. Зато је примена рачунара у савладавању не само образовних, него и методолошких, истраживачких, па и техничких задатака везаних за област Диофантових једначина специфична и различита у односу на друге теме које се реализују у оквиру рада са даровитима.

Редови који следе ће покушати да прикажу како граница између математике, информатике и рачунарства у суштини не постоји и да корелација између ове три важне општеобразовне области може бити веома плодотворна.

8.2.1 ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ НА ИНТЕРНЕТУ

За истраживање Диофантових једначина на Интернету су потребни дани, јер је материјал изузетно богат и разноврстан. О томе најбоље говоре следећи подаци. Најмање присуство одреднице Диофант је 4260 страница, а о Пјеру Ферма и чувеној великој Фермаовој теореми подаци се могу тражити од 152.000 Интернет страница на руском језику до 870.000 страница на енглеском језику. О Диофантовим једначинама има око 80.000 страница, док се линеарне Диофантове једначине помињу на 46.000 Интернет страница. Пелова једначина је заступљена на 181.000 страница, тако да све оно што истраживачу није доступно из литературе сигурно се може наћи на Интернету.

Богатство садржаја је такође изузетно, па се веома лако и брзо на Интернету могу пронаћи подаци о еволуцији идеја о Диофантовим једначинама од Вавилоније, преко старогрчких математичара, Диофанта и његове "Аритметике", до Фермаове хипотезе и бављења најумнијих математичких глава њиме, до Хилберта и Матијашевича, и коначно епохалног доказа који је извео Ендрју Вајлс са сарадницима. За све ово довољно је да се искористе могућности које пружа већ поменути MaCTutor сајт.

Теоријска достигнућа која су један по један од Диофантових проблема мукотрпним радом читаве армије математичара стављали "ad acta" су такође веома присутна и довољно је на било ком претраживачу укуцати само почетну одредницу и добити низ сајтова на којима се дати проблем до танчина разматра. Ако се, на пример, неко определи за већ помињани MathWord сајт, почетни мени који као одредницу има Теорију бројева одвешће посетиоца сајта до низа тема међу којима су и Диофантове једначине.

Сам мени Диофантове једначине садржи 92, може се рећи, минималне одреднице,[287] а свака од њих је сада прича за себе. Ако се на пример пажња задржи на одредници Пелова једначина, онда ће се уочити да је садржај веома богат: мало историјата, потом веза решења Пелове једначине са верижним разломцима, затим решење Пелове једначине у експлицитмом облику, рекурентна веза између решења, таблица основних решења Пелове једначине $x^2 - py^2 = 1$ за p из интервала [2, 53] и на крају примена на решавање једначина Пеловог типа. Код сваког кључног места дат је интерни линк који корисника води ка објашњењу онога што му треба и на самом крају још две изванредне ствари: интерни линкови за даље истраживање и списак коришћених референци. Али ту није ипак крај, јер линк који садржи највећи број референци ће посетиоца одвести до каталога у коме се налази дата књига, њеног кратког садржаја, стварне и снижене цене и линка који омогућује тренутну електронску куповину дате књиге.

У односу на историјске и теоријске садржаје којих има сасвим довољно на Интернету, мањкају садржаји методичке природе,[288] али то није хендикеп за даровите ученике, већ за њихове наставнике који и иначе ретко имају прилику да своја методичка искуства упоређују са оним шта се ради код нас, а поготову у свету.

Текстова о Диофантовим једначинама има на Интернету на свим језицима и на многим сајтовима.[289] Треба их пажљиво одабрати, тако да по нивоу буду примерени узрасту ученика и не претеривати са њиховим бројем, јер за једну теоријску ствар довољна су два-три текста, при чему не нтреба занемаривати писану литературу (књиге и часописе) која ће још дуго бити најзначајнији извор информација.

Са књигама је слична ситуација, али су оне за разлику од текстова мање доступне, јер их је у електронској верзији далеко мање, а оно што се налази у каталозима је, бар за ученике из наше земље углавном недоступно.[290] Међутим, руска Интернет библиотека[291] је сасвим довољна да својим књигама и збиркама у потпуности задовољи теоријске и проблемске потребе рада са даровитима.

Што се тиче задатака и Диофантових проблема за непосредни рад младих математичара, њих је на Интернету толико да количина задатака превазилази временске могућности сваког ученика и наставника. Ако се претраже задаци са ИМО, регионалних и националних олимпијада, проблеми који су решавани на припремама националних екипа за ИМО[292] и проблеми који су већ организовани по областима на разним руским сајтовима, онда је то лепа збирка доста тешких Диофантових једначина.

---

[287] Списак од 92 одреднице дат је у Прилогу 9.

[288] Један од могућих текстова видети на сајту: http://www.referatfrom.ru/watch/24422/1.html

[289] У Прилогу 10. дат је списак текстова о Диофантовим једначинама добијен претраживањем часописа "Квант" у периоду 1970 – 2003. година. Видети [8.162.]

[290] Погледати серију књига из теорије бројева: http://www.amazon.com

[291] Видети један одговарајући линк на сајту: http://www.mccme.ru/

[292] У Прилогу 11. дат је као пример текст задатака о Диофантовим једначинама који су рађени на припремама екипе Бразила за ИМО

Оно што нема у својој обичној или електронској библиотеци, ученик може скенирати из литературе коју позајми од својих другова или наставника, а затим меморисати, тако да му је доступно у сваком тренутку. Када је реч о електронском материјалу везаном за Диофантове једначине, без обзира ког је садржаја (историјски, теоријски, проблемски...), без обзира у којој је електронској форми, он би могао да се систематизује на било који начин, а једна од могућности лежи у класификацији датој у теоријским основама ове књиге, дакле од линераних Диофантових једначина, па све до олимпијских задатака и Диофантових проблема.

Све у свему на Интернету има много историјског, теоријског и проблемског материјала везаног за Диофантове једначине. Треба га само пронаћи, добро систематизовати и организовати квалитетан рад на његовом проучавању и резултати сигурно неће изостати.

8.2.2. РАЧУНАР КАО СРЕДСТВО ЗА РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Рачунар може бити од велике користи не само у припреми ученика за рад на Диофантовим једначинама, већ и у току самог решавања Диофантових једначина. Та помоћ се може дефинисати на три нивоа:

1) Коришћење готових програма за решавање Диофантових једначина;
2) Коришћење рачунара као брзе нумеричке машине;
3) Решавање Диофантових једначина прављењем структуираних програма .

А. КОРИШЋЕЊЕ ГОТОВИХ ПРОГРАМА

Није непознато, а они који су мало претраживали Интернет сигурно су видели да на Интернету има сајтова који су намењени за решавање одређених математичких проблема, а постоје и готови софтверски математички пакети, који исто то веома успешно чине.

Ради илустрације поменимо три сајта уз помоћ којих се могу успешно решити линеарна Диофантова једначина, потпуна квадратна алгебарска Диофантова једначина са све непознате и Пелова једначина.[293] Ови сајтови садрже и друге сличне програме као што су одређивање конгруенције по модулу за сваки квадратни трином, линеарне конгруенције, разне факторизације, који могу бити такође од користи код решавања Диофантових једначина. Вероватно постоје и други сајтови који садрже сличне програме. Вредело би их претражити и упознати се са њиховим садржајима.

---

[293] Видети сајтове: http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/linear.html; http://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM; http://www.numbertheory.org/php/patz.html

Ови сајтови не могу бити трајно опредељење даровитих. У суштини њихово коришћење ничим не обогаћује знање ученика, јер је то потпуно исти процес као и код оних који преписују домаће задатке. Задаци су решени, али онај ко их је "решио" уз помоћ компјутера од тога нема никакве користи. Међутим, ови програми и сви други програми овог типа сигурно да нису за подсмех и сигурно је да их треба користити, поготову што они имају и опцију да се скрије сам поступак решавања. Њихов значај је пре свега у томе што ученик у рачунару и софтверу који је на сајту програмиран има поузданог "сарадника" – контролора да ли је нешто тачно урадио или не и то у широком спектру једначина. Ови програми могу бити драгоцена помоћ наставнику у састављању оригиналних Диофантових једначина.

У овој сфери веома интересантан је и сајт GeoGebra. [294] GeoGebra је математички програм који повезује геометрију, алгебру и анализу. Развио га је млади аустријски математичар Markus Hohenwarter на Универзитету у Салзбургу за учење математике у школама.

ГеоГебра је, с једне стране динамички геометријски систем, што значи да се праве, криве, функције, могу конструисати и динамички мењати. С друге стране, једначине и координате се могу уносити директно. Добија се да израз у алгебарском прозору одговара нацртаном објекту и обрнуто, за функцију представљену аналитички у алгебарском прозору се добија одговарајући геометријски објекат.[285]

ГеоГебра се у области Диофантових једначина може веома лепо користити код решавања линеарних и квадратних Диофантових једначина са две променљиве, али и код осталих једначина код којих се једна од промењивих може изразити као функција друге променљиве. Међутим, софтверски пакет ГеоГебре може послужити и као изванредно средство за раздвајање могућих случајева при решавању Диофантових једначина, што овај програмски пакет чини прилично корисним.

Б. КОРИШЋЕЊЕ РАЧУНАРА КАО НУМЕРИЧКЕ МАШИНЕ

Сигурно виши ниво коришћења рачунара је ако он помаже да неки рачунски процес који би дуго трајао заврши брже него што то човек реално може. У том смислу је рачунар само помоћно средство. Оваквих ситуација је много и набројаћемо неке од њих, које се успешно завршавају захваљујући помоћи Microsoft Excel програмског пакета који није нека јака програмибилна машинерија, али се неке ствари могу делимично програмирати и зато се може значајно брже решити проблем.

---

[294] Видети: http://www.geogebra.at , а пример решавања једначине $x^2 + xy + y^2 = 19$ у Прилогу 12.

Код решавања линеране Диофантове једначине ax + by = c, ако су коефицијенти a, b и c мало већи, понекад није лако одредити почетно решење (x_o, y_o), јер и примена Еуклидовог алгоритма може да потраје. Најједноставније је почетно решење одредити експериментом у интервалу [0, к], где је к мањи од бројева $|a|$ и $|b|$. Тај посао се у Microsoft Excel-у уради за највише 1 минут. Исписивање општег решења је потом само формалност.

Ако се посматра Диофантова једначина облика $ax^2 + by^2 = n$, где су a и b природни бројеви онда је јасно да је интервал у коме се траже решења ограничен, па је једна од променљивих, рецимо $x \leq \left[\sqrt{\frac{n}{a}}\right]$ = к. Тада се израчунавањем променљиве у функцији од x добија $y = \sqrt{\frac{n - ax^2}{b}}$ и конкретним проверама у интервалу [1, к] за врло кратко време могу одредити целобројна решења (ако их једначина уопште има). Ово ученику може бити оријентација да ако већ на први поглед није успео да реши једначину да то учини сада или да зависно од резултата истраживања доказује да једначина нема решења.

Претходни поступак се може ефикасно применити и на одређивање основних решења Пелове једначине, јер се врло брзо дође до целобројног пара који представља то решење.

Потом се коришћењем рекурентних формула могу добити и нека од осталих решења, али треба знати да поступак врло брзо тежи ка великим бројевима, који се због тога могу записати само у експоненцијалном облику.

Слично је и са Питагорином једначином $x^2 + y^2 = z^2$, где се исто тако за врло кратко време могу коришћењем општег решења $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$ добити многе Питагорине тројке.

Наравно да су могућности коришћења рачунара у ове сврхе и далеко веће у смислу решавања још многих класа Диофантових једначина (ирационалних, експоненцијалних...) чије се решење посматра на ограниченом интервалу, али је сигурно да је и у овој ситуацији рачунар само помоћно средство, а да су далеко веће могућности у изради одговарајућих програма за решавање појединих Диофантових једначина.

В. КОРИШЋЕЊЕ РАЧУНАРА ЗА ПРОГРАМИРАЊЕ РЕШЕЊА

Израда конкретног програма у неком од програмских језика је нешто што може бити добра ствар за даровитог ученика, уз неколико важних напомена:

1) Рачунар може, далеко брже и ефикасније да изврши само оно што му човек зада и зато је, поготову после Матијашевичевог решења 10. Хилбертовог проблема, и поред свих напредака у сфери вештачке интелигенције, сасвим јасно да су за сада његове могућности када су у питању Диофантове једначине, још увек ограничене и иза човекових.

2) Програмирање решења Диофантових једначина не сме бити процес који омаловажава рачунар и даје му сирову форму за решавање и зато се мора водити рачуна да човек учини све што може пре него што крене у програмирање, а то значи да:

- дефинише услове када једначина има, а када нема решења (ако је то могуће);
- да дефинише интервале у којима се крећу вредности непознатих (ако је то могуће);
- да максимално упрости једначину, како њена форма не би оптерећивала алгоритам;

3) Решавање Диофантових једначина уз помоћ рачунара не ослобађа човека одговорности за најважнија питања везана за сваку Диофантову једначину, јер:

- рачунар за многе класе Диофантових једначина са сигурношћу може утврдити егзистенцију једног или више решења,
- рачунар за многе класе Диофантових једначина не може са сигурношћу тврдити да ли једначина има или нема решења;[295]
- рачунар за многе класе Диофантових једначина може тачно одредити сва решења и пребројати колико решења има;
- рачунар за многе класе Диофантових једначина не може одредити сва решења и не може пребројати колико решења има, иако је њихов број коначан;
- рачунар за многе класе Диофантових једначина не може дати одговор да ли имају коначно или бесконачно много решења;
- човек може добити опште решење Диофантове једначине, а рачунар само нумерички (или опште ако му је већ саопштена формула за генерисање свих решења).

Ове напомене показују колико је решавање Диофантових једначина уз помоћ рачунара осетљив посао и са колико опреза треба прићи не само решавању, него и тумачењу решења.

Међутим, дате напомене указују и на то да је програмирање решавања Диофантових једначина јако креативан и одговоран посао и да се њиме могу бавити само они који довољно добро познају историјске и теоријске основе и природу Диофантових једначина.

Шта се у области Диофантових једначина може програмирати?

Одговор није баш једноставан, али се може поделити на неколико једноставнијих теза. Поуздано се може програмирати:

---

[295] Најбољи пример за то је велика Фермаова теорема.

- решавање Диофантове једначине чија је област дефинисаности подскуп нумеричког домена рачунара;[296]
- решавање Диофантових једначина чији је алгоритам за решавање познат, без обзира да ли једначина има коначно или бесконачно много решења;
- диофантски проблеми везани за n-тоцифрене бројеве;.

Конкретно се могу правити програми за решавање линеране Диофантове једначине, многих класа квадратних једначина (међу којима Питагорине и Пелове), као и многих једначина степена већег од 2, ирационалних, експоненцијалних једначина, Диофантових проблема и других једначина који задовољавају горње услове.[297]

Све остало је истраживање, које има за циљ да открије да ли у нумеричком домену рачунара Диофантова једначина има једно или више решења; каква је природа тих решења; може ли се наслутити да једначина има бесконачно много решења; ... Али генерално, тумачењу добијених резултата се мора прићи са највећим пажњом и добром провером свих закључака који се наслућују, с обзиром на опасности које су већ напоменуте. Евентуална истраживачка хипотеза се мора поткрепити коректним теоријским доказом. Рачунарска провера је само потребан, али не и довољан доказ и то треба имати на уму, без обзира на тенденцију која је посматрајући рачунарски резултат такорећи очигледна.

8.2.3. О РАЦИОНАЛНОСТИ КОРИШЋЕЊА РАЧУНАРА

Међутим, са коришћењем рачунара не треба претеривати, поготову када је очигледно да се многобројним методама за решавање Диофантових једначина приказаним у теоријским основама овог рада, као и онима које нису могле бити обухваћене, до решења може доћи без неке велике муке.

Рачунар треба користити за рутинске послове, за решавање једначина које траже превелика израчунавања и избацивање решења једначина чије решавање је већ програмирано. Програмирати решавање једначине која нема општи карактер већ представља само парцијални проблем има смисла само ако заиста не иде елементарним путем, ако нам је потребно бар једно решење, или ако треба проверити решење које је добијено неком од метода.

ПРИМЕР 163. *Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.*

---

[296] Област дефинисаности Диофантове једначине је у ствари скуп могућих решења, који је код многих једначина мањи него што је условима проблема дато. Под нумеричким доменом рачунара подразумева се област D^n , где је $D = \{x \in R \mid a \le |x| \le b\}$ при чему су a и b, најмањи и највећи позитиван број који може регистровати рачунар.

[297] Један списак могућих проблема за програмирање дат је у Прилогу 13.

РЕШЕЊЕ: Ако се напише одговарајућа једначина јасно је да из услова задатка следи да је $10x + y = x^3 + y^2$, или $x(10 – x^2) = y(y – 1)$. Како је производ бројева на десној страни једнакости ненегативан, то мора бити и на левој, одакле је $x \leq 3$. С друге стране број $y(y – 1)$ је паран што значи да и број x мора бити паран. Следи да је $x = 2$, а онда се из једначине $y(y –1) = 12$, добија $y = 4$, па се ради о броју $24 = 2^3 + 4^{2.}$

Јасно је да најједноставнији програм за решавање овог диофантског проблема мора имати два циклуса од којих један третира непознату x, а други непознату y и да ће рачунар $9{\cdot}10 = 90$ пута проверавати за које x и y је једнакост испуњена. Поставља се питање да ли вреди писати програм, ако се задатак без рачунара реши за један минут?

Овај пример указује и на чињеницу да и диофантски проблеми везани за n-то цифрене бројеве нису, у принципу, за рачунар неки велики проблем, ако је дат природан број n. Међутим, код једног броја проблема се траже сви n-тоцифрени бројеви који испуњавају дати услов и није прецизиран број цифара, па програмирање задатка мора имати своју припрему, то јест аналитичко ограничавање броја n. Као илустрација може послужити следећи пример.

<u>ПРИМЕР 164.</u> Цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 распоредити уместо звездица у једнакости $* + * = * - * = * \cdot * = * * : *$, *тако да се свака цифра употреби само једном и да све једнакости буду тачне.*

РЕШЕЊЕ: Ако је резултат свих ових израза x, онда је $3 \leq x \leq 8$. Поставља се питање да ли је рационалније програмирати рачунар који треба да испита 9! варијација или методом разликовања случајева размотрити само шест вредности за број x, које дати проблем чине елементарним.

<u>ПРИМЕР 165.</u> Одредити све природне бројеве чији је квадрат једнак петом степену збира његових цифара. [298]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број n и нека он има к цифара ($к \in N$). Нека је збир цифара броја n једнак S. Тада је $10^{к-1} \leq n < 10^к$ и $S \leq 9к$, а из услова задатка је $n^2 = S^5$. Очигледно важи неједнакост: $(9^{к-1})^2 < (10^{к-1}) \leq n^2 = S^5 \leq (9к)^5$.

Дакле, $9^{2к-2} < 9^5 \cdot к^5$. Следи да је $9^{2к-7} < к^5$. Дата неједнакост важи за само неколико бројева $к \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Да је за $к \geq 6$ број $9^{2к-7} > к^5$, најлакше се доказује математичком индукцијом, а за рачунар више није проблем да претресе све природне бројеве од 1 до 10^5.

---

[298] Задатак је са савезног такмичења – Југославија 1977. године. Видети [8.161]

Сигурно је да тема коришћења рачунара у раду са обдаренима у области Диофантових једначина може бити и шира, али то није сврха овог рада. Циљ овог поглавља је био да прикаже те велике и разноврсне могућности, а у следећем поглављу ће бити и конкретних примера примене, тј. директног и то вишенаменског коришћења рачунара у методичким моделима наставе Диофантових једначина.