"Настава математике није наука.
Она је уметност"

Ђерђ Поја - "Математичко откриће"

9. НЕКИ МЕТОДИЧКИ МОДЕЛИ НАСТАВЕ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА

Основно питање методичке трансформације сигурно је, како све већ речено у претходним деловима рада (психолошке карактеристике даровитих, сазнања о активним облицима учења, организационе препоставке рада са даровитима, еволуцију идеја о Диофантовим једначинама, програмске претпоставке, теоријске основе, примену рачунара ...) конституисати у квалитетан, методички прихватљив, разноврсан, динамичан и ефикасан систем рада са даровитима на плану Диофантових једначина.

Зато је тежишно опредељење да се методичка трансформација заснива на:

- уважавању интелектуалних карактеристика даровитих;
- поштовању савремених педагошких погледа на активно учење;
- разноврсности облика рада са даровитима у области математике;
- усаглашености садржаја рада са еволуцијом идеја о Диофантовим једначинама;
- програмским садржајима који су савремено конституисани на основу компаративне анализе наставних искустава у области Диофантових једначина код нас и у свету;
- исцрпној теоријској анализа материје о Диофантовим једначинама и
- могућностима оптималне примене рачунара у раду са даровитима уопште, а посебно на плану Диофантових једначина.

Циљ овог дела рада је да полазећи од изнетих опредељења конституише као илустрацију довољан број методичких модела који су могу применити у раду са даровитима у области Диофантових једначина у широком распону наставних могућности од редовне наставе математике до разноврсних облика рада са младим математичарима у ваннаставним активностима. Дакле, циљ је да се на примеру Диофантових једначина прикаже богатство идеја које стоје на располагању реализаторима рада са даровитима, па зато овај део рада не треба схватити као скуп методичких рецепата (модела) које ће безрезервно прихватити наставници практичари (будући корисници овог рада), већ као само једно виђење могућег методичког приступа у реализацији циљева и исхода рада са младим математичарима уопште и посебно, на плану Диофантових једначина.

Изложени методички модели биће груписани у неколико целина, а класификација целина је учињена према врсти наставе у оквиру које се користи дати методички модел. То значи да ће у овом делу рада бити учињен напор да се за неке од датих циљева и исхода пронађе најадекватнији методички материјал који ће најбоље илустровати примену сваког од анализираних облика активног учења на садржаје о Диофантовим једначинама, при чему је евидентно да ће се садржаји појединих методичких модела делимично преклапати.

9.1. ДИФЕРЕНЦИРАНИ ПРИСТУП РЕДОВНОЈ НАСТАВИ

Рад са даровитим ученицима кроз редовну наставу се најчешће реализује методом решавања проблема, при чему се користи групни или индивидуални облик рада. Такав начин рада је у нашим школама прилично коришћен и. углавном се одвија кроз диференцирање захтева, при чему се диференцијација, најчешће, врши у три правца:

- Додатни захтеви при фронталном раду;
- Групни рад у оквиру редовне наставе;
- Диференцирани домаћи задаци.

Наставни сценарио који излажемо и довољно детаљно приказујемо као илустрацију рада са даровитима у редовној настави, због рационалности, обједињује сва три наведена могућа методичка модела.[299] Наглашавамо да је при реализацији редовне наставе, а наравно и уопште, могуће рад са обдаренима реализовати и искључивом применом једног модела или, како то у наставној пракси најчешће бива, плодотворном комбинацијом расположивих модела:

<u>СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:</u>

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Редовна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Рационални алгебарски изрази
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Идентичне трансформације полинома
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Упознате методе растављања полинома на чиниоце применити на применити на
ТИП ЧАСА:	Час увежбавања и примене стечених знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Експериментални метод (проблемска настава)
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронатни и групни
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Збирка задатака и наставни листићи

У уводном делу часа кратко се обнављају садржаји везани за упознате методе растављања полинома на чиниоце (примена дистрибутивног закона, квадрат збира и разлике, разлика квадрата, збир и разлика кубова) и наговештава њихова примена иа разноврсне математичке проблеме.

[299] ММ је скраћеница за Методички Модел, а број поред њега представља редни број за конкретан методички модел

У првом делу часа реализује се настава по методичком моделу:

9.1.1. ММ 1. - ДОДАТНИ ЗАХТЕВИ ПРИ ФРОНТАЛНОМ РАДУ

Основа овог методичког модела је да у оквиру проблема (а) који је фронтално презентиран свим ученицима, поједини ученици добијају у оквиру истог задатка и додатне захтеве (b), (c) ... који могу, али и не морају имати очигледну повезаност. У овом делу наставног рада решавају се следећи проблеми:

<u>ЗАДАТАК 1.</u> а) Раставити на чиниоце полином $xy - 3x - 5y + 15$. *b) Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y тако да је* $xy - 3x + 5y + 12 = 0$.[300]

<u>ЗАДАТАК 2.</u> а) Полином $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$ *приказати као збир квадрата два бинома. b) Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y тако да је* $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$ *c) Одредити све парове (x,y) целих бројева x и y тако да је* $x^2 + y^2 = 4y - 2x$.

<u>ЗАДАТАК 3.</u> а) Раставити на чиниоце по.лином $4x^2 - 9y^2$. *b) Одредити све парове (x, y) целих бројева x и y тако да је* $4x^2 - 9y^2 = 108$. *c) Постоје ли природни бројеви x и y такви да је* $4^x - 9^y = 7$?

У прва два примера захтеви (а), (b) и (c) имају очигледну повезаност, у трећем је то делимично видљиво, а у четвртом примеру се на први поглед чини да сва три дела немају функционалне повезаности. Сигурно је да се од ова четири примера може направити 12 независних проблема, поређаних у дидактичком низу од лакшег ка тежем, који могу бити понуђени свим ученицима да их решавају сопственим темпом, тако да рад са одабраним ученицима ни у ком случају не омета рад са осталим ученицима, а да се при том, увежбавајући алгебарске трансформације полинома, доста тога уради и на плану веома активног рада на Диофантовим једначинама.

У другом делу часа настава се реализује се по методичком моделу:

9.1.2. ММ 2. - ГРУПНИ РАД У ОКВИРУ РЕДОВНЕ НАСТАВЕ

Могућност унеколико различита од претходне је да, док остали ученици нешто споријим темпом решавају једноставнији проблем по проблем, једној групи даровитих ученика (који седе у суседним клупама) се поделе наставни листићи са посебно одабраним проблемима који подразумевају решавање Диофантових једначина коришћењем разних врста алгебарских трансформација. Структура једног таквог наставног листића дата је кроз неколико следећих примера:

[300] У овом поглављу већина примера даје се без решења, јер суштина је у функцији проблема а не у његовом решавању. При том, највећи број примера је већ решен у поглављима 6.и 7.

<u>ЗАДАТАК 4.</u> *а) Може ли се број 100 и на колико начина приказати као: а) разлика квадрата два природна броја ; b) збир квадрата два природна броја ; с) производ два узастопна природна броја?*

<u>ЗАДАТАК 5.</u> *Одредити природан број n и прост број p тако да је* $5p + 1 = n^2$.

<u>ЗАДАТАК 6.</u> *Постоје ли цели бројеви x и y такви да је* $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?

<u>ЗАДАТАК 7.</u> *Одредити природан број n тако да је* $n^2 + 2n + 13$ *квадрат неког природног броја.*

<u>ЗАДАТАК 8.</u> *Одредити природан број n и прост број p тако да је* $p = n^4 + 4$.

<u>ЗАДАТАК 9.</u> *Постоје ли цели бројеви x, y и z такви да је* $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 24$.

При реализацији овог дела часа наставник има задатак да обилази ученике који раде по наставним листићима, разговара о могућим идејама за решења, даје упутства и контролише тачност урађеног. Ученици раде максимално могућим темпом, а задаци који се не ураде током часа остају за домачи задатак.

У завршном делу часа наставник ученицима задаје домаћи задатак из збирке задатака, а група обдарених добија посебан домаћи задатак.

9.1.3. ММ 3. - ДИФЕРЕНЦИРАНИ ДОМАЋИ ЗАДАЦИ

Проблем рада са даровитима у оквиру редовне наставе може се решити и диференцираним домаћим задацима, где одабрани, талентовани ученици не добијају задатке који су идентични са осталима, него посебно припремљене проблеме. Структура једног таквог домаћег задатка дата је кроз неколико следећих примера:

<u>ЗАДАТАК 10.</u> *Постоји ли прост број p који се може приказати у облику* $8n^2 + 10n + 3$, *где је n неки цео број?*

<u>ЗАДАТАК 11.</u> *Постоје ли цели бројеви n и k такви да је* $n^3 - n + 2^n = 1992к$?

<u>ЗАДАТАК 12.</u> *Одредити све природне бројеве облика* $\overline{222...222}$ *који се могу представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја.*

<u>ЗАДАТАК 13.</u> *Ако је n природни број и p прост број, решити једначину* $n^5 + n^4 + 1 = p$.

<u>ЗАДАТАК 14.</u> *а) Полином* $2x^2 + 2y^2$ *приказати као збир квадрата два полинома. b) Доказати да једначине* $x^2 + y^2 = n$ *и* $x^2 + y^2 = 2n$ *имају једнак број решења у скупу природних бројева. с) Доказати да једначина* $x^2 + y^2 = 6^к$ $(к \in N)$ *нема решења у скупу природних бројева.*

<u>*ЗАДАТАК 15.*</u> *Природан број n је такав да су бројеви 2n + 1 и 3n + 1 квадрати природних бројева. Доказати да је број 5n + 3 сложен.*

<u>*ЗАДАТАК 16.*</u> *Одредити све целе бројеве x, y и z који испуњавају једнакост* $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 6$.

<u>*ЗАДАТАК 17.*</u> *Постоје ли природни бројеви x и y такви да је* $2^x + 1 = y^2$*. Колико има решења?*

*

Наведени примери показују како се практично, комбиновањем ова три методичка модела, може кроз редовне наставне активности реализовати читава једна наставна тема, као што је "Решавање Диофантових једначина коришћењем производа". Приказани математички модели илуструју и могућност да се облици рада у којима су углавном даровити у пасивном положају, искористе за једну сасвим другачију активну улогу у којој се једнолична и једноставна репродукција садржаја замењује креативним односом и учењем путем решавања проблема.

Међутим, сви наведени модели се могу успешно користити, поред редовне наставе, и у другим облицима рада са даровитима.

9.2. ДОДАТНА НАСТАВА

Највећи део рада са даровитима у области математике се одвија у оквиру додатне наставе. Отуда је неопходно презентирати оне методичке моделе који су карактеристични управо за додатни рад.

9.2.1. ММ 4. - КЛАСИЧНА НАСТАВА

Многе наставне активности у раду са даровитима нису ништа друго до смислено вербално рецептивно учење које је у суштини скоро незамењиво код уводних тема, дакле код тема које ученике уводе у нове садржаје и упознају са новим методама. Ова настава се обично реализује дијалошком наставном методом и фронталним обликом рада. У додатној настави математике, овај методички модел никада није сувишан, јер га веома често прате друге методе учења, а најчешће метод учења решавањем проблема. Модел једног таквог рада илуструјемо на примеру теме "Метод разликовања случајева", јер наставни садржаји који се у оквиру ове наставне јединице реализују су уводни садржаји и представљају основу за даљи рад на изучавању метода и техника решавања разних Диофантових једначина. Методички модел који се предлаже биће приказан следећим наставним сценариом:

СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Увод у теорију Диофантових једначина
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Метод разликовања случајева
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Овладати идејом разликовања случајева као општом идејом у решавању многих класа Диофантових једначина
ТИП ЧАСА:	Час стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронатни
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Радни материјал

Уводни део часа посвећен је садржајима о разликовању случајева (и његовој логичкој основи) као општем методу решавања Диофантових једначина и појашњавањима самог појма решења Диофантове једначине, при чему се истиче значај одговора на пет најважнијих питања везаних за сваку Диофантову једначину.

1. Доказати или оповргнути егзистенцију решења;
2. Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много);
3. Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења;
4. Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
5. Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

У главном делу часа се указује на метод разликовања случајева излагањем и анализом решења следећих примера:

ЗАДАТАК 18. *Постоје ли природни бројеви* x *и* y *такви да је* $1! + 2! + \ldots + x! = y^2$. *Колико решења има дата једначина?*

ЗАДАТАК 19. *Одредити све ненегативне целе бројеве* x *и* y *који испуњавају једнакост:* $x^3 + y^2 = 16x - 2y$.

ЗАДАТАК 20. *Да ли једначина* $x^4 + y^4 = 333 \ldots 333$ *(2005 тројки) има решење у скупу целих бројева?*

ЗАДАТАК 21. *Одредити све целе бројеве* x *и* y *за које је* $x^2 + y^2 + 5y = 2xy + 5x + 1$.

Наведени примери карактеристични су по томе што презентирају једначине чије су области могућих решења и коначни и бесконачни скупови, али и чији су скупови решења разноврсни (од празног скупа, преко коначних до бесконачних скупова). Разноврсни су и системи раздвајања случајева: последња цифра, неједнакост, конгруенција и производ. Оваква разноликост даје могућност да се у анализи са само четири примера стекне пун увид у метод разликовања случајева, али и осете димензије тражења што ширих скупова у којима једначина има, односно нема решења.

Свака наставни модел има оправдање ако се бар једним примером провери колико трага је претходно учење оставило код ученика. Таква проверавања[301] треба практиковати у завршном делу часа, ма о ком се моделу наставе радило, јер су она увек добра оријентација наставнику у оцени успешности примењеног методичког модела.

*ЗАДАТАК 22. Дата је једнакост: * + * = * - * = * · * = * * : *. Цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 треба распоредити уместо звездица тако да се свака цифра употреби само једном, а добијене једнакости буду тачне.*

У циљу увежбавања решавања Диофантових једначина методом разликовања случајева ученицима треба дати и проблеме за самосталан рад код куће водећи рачуна да и они буду разноврсни како по начину разликовања случајева, тако и по броју решења:

ЗАДАТАК 23. Производ два двоцифрена природна броја записује се само помоћу неколико цифара 7. О којим бројевима је реч?

ЗАДАТАК 24. Одредити све природне бројеве x и y чији је производ седам пута већи од њихове разлике.

ЗАДАТАК 25. Дата је једначина $x^2 + 3y = 15$. *Колико решења дата једначина има у скупу природних, а колико у скупу целих бројева?*

ЗАДАТАК 26. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $x^2 + x + 7 = xy^2$.

ЗАДАТАК 27. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 + y^2 = 2006$..

9.2.2. ММ 5. - ПРАКТИЧНА НАСТАВА

Практична настава подразумева да наставне активности буду усмерене ка стицању практичних знања, тј. умења која су неопходна за даље усавршавање. Примери таквог учења у раду са даровитима у области математике могу бити: обука ученика за коришћење Интернета, обука ученика за коришћење математичке литературе, обука ученика за коришћење библиотеке ...

[301] Таква проверавања су у педагошкој теорији позната као "петоминутна проверавања", али време од пет минута не треба схватити буквално, јер ученицима зависно, од сложености проблема, треба оставити мање, више или тачно пет минуат.

Овај методички модел може се илустровати на многим примерима, а на овом месту дајемо као пример сценарио наставног рада за обуку ученика у коришћењу Интернета у области Диофантових једначина:

СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:

РАЗРЕД:	2. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Увод у теорију Диофантових једначина
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Диофантове једначине и Интернет
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Упознати ученике са методологијом претраживања по Интернету и најважнијим сајтовима на којима се могу наћи садржаји везани за Диофантове једначине
ТИП ЧАСА:	Час стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод демонстрације
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Рад у паровима и фронтални рад
МЕСТО НАСТАВНОГ РАДА	Кабинет за рачунарство
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Рачунари, видео бим, Интернет и Power Point презентација

У уводном делу часа ученици се упознају са разним могућностима коришћења рачунара за учење и чињеницом да је Интернет највећа база података на свету која садржи веома интересантне податке од којих се многи могу искористити за учење математике.

У даљем току часа ученици добијају Power Point презентацију "Математика и Интернет"[302] која у себи садржи унапред припремљене линкове, а фронтаним радом коришћењем претраживача сви решавају следећи задатак:

ЗАДАТАК 28. Користећи претраживач GOGLE одговори на следећа питања: На колико страница на Интернету се помиње велики француски математичар Пјер Ферма?Које године је рођен Ферма? Како гласи најзначајнија од Фермаових теорема?

По завршетку посла везаног за откривање три тражена податка и упознавању технологије претраживања прелази се на рад у паровима где сваки од парова има појединачни задатак везан за посету одређеном Интернет сајту и обавезу да у завршном делу часа преко видео бима детаљно прикаже решење свог задатка. Ученици по паровима добијају следеће конкретне задатке:

[302] Садржај презентације се може видети из прилога 14. у коме су дати сви слајдови наведене презентације

<u>ЗАДАТАК 29.</u> Користећи линк за математичку енциклопедију MATHWORD, у делу Теорија бројева, пронађи поглавље Диогантове једначине и што је могуће детаљније проучи садржај тог поглавља. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију.

<u>ЗАДАТАК 30.</u> Користећи линк ВЕЛИКА ФЕРМАОВА ТЕОРЕМА, што је могуће детаљније проучи садржај добијеног сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију.

<u>ЗАДАТАК 31.</u> Користећи линк МТ (MAC TUTOR) што је могуће детаљније проучи садржај добијеног сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на Диофанта и његову биографију.

<u>ЗАДАТАК 32.</u> Користећи линк за математички часопис КВАНТ и што је могуће детаљније проучи садржај тог сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на текстове о Диофантовим једначинама који су у њему објављени.

<u>ЗАДАТАК 33.</u> Користећи линк РУСКА ЕЛЕКТРОНСКА БИБЛИОТЕКА што је могуће детаљније проучи садржај добијеног сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову презентацију са посебним освртом на књигу о Пеловој једначини .

<u>ЗАДАТАК 34.</u> Користећи линк ЗАДАЦИ ИЗ СВИХ ОБЛАСТИ што је могуће детаљније проучи садржај тог сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на текстове о Диофантовим једначинама и проблемима.

<u>ЗАДАТАК 35.</u> Користећи линкове за ИМО што је могуће детаљније проучи садржаје тих сајтова. Забележи њихове Интернет адресе и најинтересантније делове сајтова и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на текстове задатака о Диофантовим једначинама и проблемима.

<u>ЗАДАТАК 36.</u> Користећи линк КВАДРАТНА ДИОФАНТОВА ЈЕДНАЧИНА што је могуће детаљније проучи садржај тог сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на демонстрацију решења неке од једначина по твом избору.

<u>ЗАДАТАК 37.</u> Користећи линк МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА У СИЦГ што је могуће детаљније проучи садржај тог сајта. Забележи Интернет адресу сајта и његове најинтересантније делове и припреми њихову кратку презентацију са посебним освртом на задатке о Диофантовим једначинама и проблемима.

Из претходних девет задатака је јасно да обука ученика у претраживању Интернета није фиктивне природе и нема амбицију да ученици траже било шта.

Напротив, циљ претраживања је сасвим прагматичан, јер је претраживање усмерено на прикупљање само једног малог дела од огромне количине информација о Диофантовим једначинама која се може наћи на Интернету.

После реферисања[303] сваке од група које има за циљ да сви упознају све важне садржаје, тј. сајтове, ученици преснимавају презентацију на своје дискете и добијају задатке за самосталан рад код куће:

ЗАДАТАК 38. Користећи презентацију МАТЕМАТИКА И ИНТЕРНЕТ прегледај све дате сајтове и кратко забележи њихове садржаје.

ЗАДАТАК 39. Коришћењем опција које пружа Microsoft Internet Explorer формирај базу линкова који ти могу послужити за даље изучавање математике.

ЗАДАТАК 40. Користећи претраживаче формирану базу линкова допуни адресама нових, за учење математике интересантних, сајтова.

9.2.3. ММ 6. - ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА

Учење решавањем проблема (проблемска настава) је методички модел који се најчешће примењује у раду са даровитима. Решавање проблема је процес који у највећој мери активира све интелектуалне потенцијале даровитих. То је процес који обезбеђује примену свих стечених знања и метода и њихову синтезу у логичан низ чињеница које из датих услова изводе потребне закључке и корак по корак воде ка добијању крајњег решења.

Теоретичари решавања математичких проблема[304] разликују две врсте математичких проблема: конструктивни проблеми и проблеми доказивања. Решавање конструтруктивних задатака подразумева конструкцију новог математичког објекта (геометријска фигура или тело, скуп бројева, низ, формула ...) или израчунавање неких његових битних карактеристика (обим, површина, запремина, елементи скупа, ...) који задовољавају све постављене услове. Решавање доказних задатака је поступак којим се из датих услова који важе за један или више математичких објеката, коришћењем одређених логичких и математичких правила доказује неко ново својство или однос датих математичких творевина.

На први поглед решавање Диофантових једначине се може убројати у конструктивне проблеме. И то је сигурно тачно, уз напомену да је решавање Диофантових једначина истовремено и доказни задатак, јер је најчешће поред одређивања решења (ако оно постоји) потребно доказати да су то сва решења, тј. да проблем нема других решења. Отуда решавање Диофантових једначина спада у ред ретких математичких задатака који у једном решењу најчешће садрже и конструктивни и доказни део.

[303] Реализација овог наставног рада траје 90 минута, јер је немогуће 9 сајтова прегледати за време краће од 50-60 минута.

[304] Видети књигу [9.175.] Џорџ Поја - Математическое открытие – "Наука" – Москва ,1976.

Чувени амерички математичар (мађарског порекла) Ђерђ Поја у својој популарно написаној књизи "Како ћу решити математички задатак?"[305] даје и на примерима објашњава један врло употребљив општи алгоритам за решавање математичких проблема. То је поступак сигурно треба да буде увек на уму сваком даровитом ученику и зато је у раду са даровитима неопходно да се добро илуструје поменути алгоритам. Наравно, неће сам алгоритам решити ниједну Диофантову једначину, али може много помоћи да се његовим коришћењем издиференцирају фазе у решавању и корак по корак дата једначина трансформише у облик из кога се далеко лакше добијају тражена решења, дефинише опште решење и доказује да једначина нема других решења.

Алгоритам за решавање математичких проблема који предлаже Ђерђ Поја дат је у следећој табели:

<table>
<tr><th>ПРВО</th><th>РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА</th></tr>
<tr><td rowspan="4">ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК</td><td>▪ Шта је непознато?
▪ Шта је задато?
▪ Како гласи услов?</td></tr>
<tr><td>▪ Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?</td></tr>
<tr><td>▪ Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!</td></tr>
<tr><td>▪ Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?</td></tr>
<tr><th>ДРУГО</th><th>ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА</th></tr>
<tr><td rowspan="5">ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!

АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.</td><td>▪ Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?</td></tr>
<tr><td>▪ Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?</td></tr>
<tr><td>▪ Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!</td></tr>
<tr><td>▪ Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен? Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти олакшао употребу тог задатка?</td></tr>
<tr><td>▪ Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!</td></tr>
</table>

[305] Видети књигу [8.173.] Ђерђ Поја: Како ћу решити математички задатак? – "Школска књига" - Загреб, 1966.

НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или дате податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи?
	▪ Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?
ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?
ЧЕТВРТО	**ПРОВЕРА**
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ?
	▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед?
	▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?

Како изгледа примена овог алгоритма на решавање појединачних Диофантових једначина дато је у прилогу 15. уз напомену да сличне фазе реализације има и проблемска настава, која се се одвија кроз неколико обавезних фаза:

1. Стварање проблемске ситуације;
2. Формулисање хипотеза;
3. Декомпозиција проблема;
4. Решавање проблема
5. Анализа резултата
6. Практична примена.

Примену проблемске наставе у области Диофантових једначина могуће је илустровати практично било којим примером, јер је цела настава математике уствари решавање проблема. Ипак из великог скупа могућих проблема везаних за Диофантове једначине определили смо се за следећи сценарио, јер нам се чини да он најбоље илуструје набројане фазе у реализацији и сам карактер проблемске наставе.

СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Решавање Диофантових једначина методом алгебарских трансформација
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Решавање Диофантових једначина коришћењем збира
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема (на примеру Диофантових једначина)
ТИП ЧАСА:	Час примене стечених знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод експеримента (проблемска настава)
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Групни и фронтални рад

Стварање проблемске ситуације започиње проблемом:

ЗАДАТАК 41. Нека су x и y цели бројеви. Колико решења имају једначине: $x^2 + y^2 = 17$, $x^2 + y^2 = 34$, $x^2 + y^2 = 68$ *и* $x^2 + y^2 = 136$?

Дати проблем се решава по групама, тако да свака од четири групе реши по један од постављених проблема. Предпоставља се, с обзиром на једноставност једначина да да то неће бити тешко и да ће се лако доћи до скупова решења (±1, ±4); (±3, ±5); (±2, ±8); (±6, ±10), па и до закључка да све једначине имају по осам решења .

Много занимљивије од самих резултата биће начини решавања једначина, јер је вероватно да ће групе које су решавале трећу и четврту једначину уочити да се оне због дељивости 68 и 136 са 4 своде на прву, односно другу једначину. С обиром да је $17\cdot 2 = 34$, $34\cdot 2 = 68$, $68\cdot 2 = 136$, поставља се питање да ли четири дате једначине и број њихових решења имају неку међусобну повезаност?

Формулисање хипотезе је могуће ако ученици из претходног примера уоче законитост. Ако не, онда је добро узети још један пример:

ЗАДАТАК 42. Нека су x и y цели бројеви. Колико решења имају једначине: $x^2 + y^2 = 125$, $x^2 + y^2 = 250$, $x^2 + y^2 = 500$ *и* $x^2 + y^2 = 1000$?

Предпоставља се да ће из добијених скупова решења (±5, ±10) и (±2, ±11); (±5, ±15) и (±9, ±13); (±10, ±20) и (±4, ±22); (±10, ±30) и) (±18, ±26), доћи не само до закључка да све једначине имају по шеснаест решења, већ и до хипотезе:

<u>*ЗАДАТАК 43.*</u> *За сваки природан број n једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имају једнак број целобројних решења.*

У фази <u>декомпозиције проблема</u> потребно је дати проблем припремити за решавање, што значи да га треба разложити на једноставније, или ученицима већ познате проблеме. Међутим, пре тога је важно објаснити да су x и y промењљиве и да је само број n фиксиран, док се x и y мењају. Дакле, ученике треба водити у смеру исказивања што већег броја идеја за решавање задатка. Неке од могућих идеја су:

1) Ако је (x_o, y_o) решење прве једначине, да ли је могуће одредити решење друге једначине.
2) Ако је (xo, yo) решење друге једначине, да ли је могуће одредити решење прве једначине.
3) Ако је (a, b) решење прве једначине, а (α, β) решење друге једначине да ли је могуће пронаћи везу између целих бројева a, b, α и β?
4) Једначина $x^2 + y^2 = n$ је еквивалентна са једначином $2x^2 + 2y^2 = 2n$. Можда је могуће повезати решења једначине $2x^2 + 2y^2 = 2n$ и $x^2 + y^2 = 2n$?

По исказивању могућих идеја <u>решавање проблема</u> је најлакше усмерити тако да сваки ученик покуша да реализује идеју која му се чини најприхватљивијом, рецимо идејом 3.

Ако је (a, b) целобројно решење прве једначине то значи да је $a^2 + b^2 = n$. Ако је (α, β) целобројно решење друге једначине то значи да је $\alpha^2 + \beta^2 = 2n$. Из добијених једнакости следи да је $\alpha^2 + \beta^2 = 2(a^2 + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$. Једнакост је могућа, ако је $\alpha^2 = (a + b)^2$ и $\beta^2 = (a - b)^2$, тј $|\alpha| = |a + b|$ и $|\beta| = |a - b|$. Како је добијено пресликавање бројева a и b у α, односно β бијекција то свакој вредности a и b одговара једна и само једна вредност бројева α и β. При том је јасно да један пар (a, b) решења прве једначине репрезентује уствари 8 различитих решења прве једначине: (a, b); (a, -b); (-a, b); (-a, -b); (b, a); (b, -a); (-b, a); (-b, -a), па према томе и 8 различитих решења друге једначине: (a + b, a - b); (a + b, -a + b); (a – b, a + b); (a - b, -a - b); (- a + b, a + b); (- a + b, - a - b); (-a - b, a - b); (- a – b, -a + b).

<u>Анализа резултата</u> ће показати и да су још неке од предложених идеја могуће, па ће проблем имати више различитих решења.

У току даљег рада треба дати и неколико задатака који показују <u>практичну примену</u> решеног проблема. Такви су рецимо задаци:

<u>*ЗАДАТАК 44.*</u> *За сваки природан број n једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2^k n$ (к је природан број) имају једнак број целобројних решења. Доказати.*

<u>ЗАДАТАК 45.</u> Доказати да за сваки природан број n једначина $x^2 + y^2 = 2^n$ *има тачно 4 решења у скупу целих бројева.*

<u>ЗАДАТАК 46.</u> Користећи опште решење Питагорије једначине $x^2 + y^2 = z^2$, *одредити опште решење једначина:* $x^2 + y^2 = 2z^2$, $x^2 + y^2 = 4z^2$ *и* $x^2 + y^2 = 8z^2$.

ММ 7. - РЕШАВАЊЕМ ПРОБЛЕМА НА ВИШЕ НАЧИНА

Квалитетан додатни рад са обдаренима подразумева и низ поступака који имају за циљ да активирају креативне способности ученика. Један од значајних поступака да се то постигне је учење решавањем проблема на више начина, чиме се шири математички видици и повећава репертоар идеја ученика, али и развијају стваралачке способности. У односу на претходни методички модел овде нема неких већих, нових методичких појединости, а специфична разлика је у томе што се за један те исти проблем тражи више идеја. На тај начин се постиже методолошка разноврсност даровитих ученика и "тренира" истраживачки дух. Овај методички модел је добар и због тога што је његова примена могућа фронталним, групним и индивидуалним приступом. Важан део овог методичког модела је презентација решења и треба водити рачуна да она буде добро планирана, разновсна и ефикасна.

Зато у завршној фази часа ученицима треба објаснити значај решавња једног истог проблема на више начина и предложити да за домаћи задатак на више начина реше проблеме:

<u>ЗАДАТАК 47.</u> Одредити све природне бројеве x и y такве да је њихов збир пет пута мањи од њиховог производа.[306]

РЕШЕЊЕ 1. Ако се једначина $xy = 5(x + y)$, тј. $xy - 5x - 5y = 0$, трансформише у $xy - 5x - 5y + 25 = 25$, добија се једначина $(x - 5)(y - 5) = 25$. Јасно је да $x - 5$ може бити 1, 5 или 25, па је $x \in \{6, 10, 30\}$ а сва решења проблема су (6,30) ; (10, 10) и (30,6). Дакле, проблем је решен коришћењем производа.

РЕШЕЊЕ 2. Из $xy = 5x + 5y$ следи да је $x = \dfrac{5y}{y-5} = 5 + \dfrac{25}{y-5}$. Како је x природан број то и десна страна једнакости мора бити природан број, па је $y - 5$ делилац броја 25, то јест $(y - 5) \in \{1, 5, 25\}$ или $y \in \{6, 10, 30\}$. Уређени парови (6,30); (10, 10) и (30,6) су решења проблема.. Проблем је решен коришћењем количника.

РЕШЕЊЕ 3. Из једнакости $xy = 5(x + y)$, јасно је да је један од бројева x или y дељив са 5. Нека је $x = 5к$ ($к \in N$). Тада је $5кy = 5(5к + y)$ или $кy = 5к + y$. Следи да је $(к - 1)y = 5к$, па је $y = \dfrac{5k}{k-1}$.

[306] Због боље илустрације ефеката примене решавања проблема на више начина дајемо и по неколико решења оба проблема

Како су к и к-1 узајамно прости бројеви, то је к -1 садржано у броју 5, па је к = 2 или к = 6, а одговарајуће вредности за x су 10, односно 30. Као решења се добијају уређени парови (10, 10) односно (30, 6). Ако се узме да је y = 5m ($m \in N$), сличним разматрањем се као решења добијају парови (10, 10) и (6, 30), па су сва решења дате једначине (6, 30); (10, 10); (30, 6), а до решења се дошло коришћењем дељивости бројева.

РЕШЕЊЕ 4. Из $xy = 5(x + y)$ дељењем са 5xy добија се $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$. Јасно је да су x и y природни бројеви већи од 5. Ако, не умањујући општост претпоставимо да је $x \leq y$, онда је $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, па је $\frac{2}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \leq \frac{2}{x}$. Следи да је $x \leq 10$, или $6 \leq x \leq 10$. Заменом вредности 6, 7, 8, 9 и 10 у полазну једнакост добија се да је y природан број само у случајевима x = 6 и x = 10. Дакле, као решења се добијају уређени парови (10, 10) односно (6, 30). Ако се узме да је $y \leq x$, онда се, сличним разматрањем, као решења добијају парови (10, 10) и (30, 6), па су сва решења дате једначине (6, 30); (10,10); (30, 6). Пут до решења остварен је уз помоћ неједнакости. Δ

<u>ЗАДАТАК 48.</u> Одредити све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$. *Проблем решити на бар три различита начина.*

Како је једначина симетрична, то је очигледно да ако је (x, y) решење, онда је и (y, x) решење. Међутим, ако је (x, y) решење, онда је решење и (-x, -y), па је довољно једначину посматрати у скупу ненегативних целих бројева, а сва решења добити коришћењем претходних закључака.

РЕШЕЊЕ 1: Како је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$, то је $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$, па се добија да је $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$. Бројеви xy и xy + 1 су узастопни, па су и узајамно прости. Како је лева страна једнакости потпун квадрат, то мора бити и десна и то је могуће само у случају када је један од бројева xy и xy + 1 нула. Дакле, сва решења дате једначине су: (0, 0); (1, -1); (-1, 1).

РЕШЕЊЕ 2: Како је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$, то је $\frac{x^2}{y} + x + y = x^2y$, па је очигледно да је $x = ky$ ($k \in N$). Тада се добија $k^2y + ky + y = k^2y^3$, па се разликују два случаја. Ако је y = 0, онда је и x = ky = 0. Ако је $y \neq 0$, онда је $k^2y^2 = k^2 + k + 1$, па број $k^2 + k + 1$ мора бити потпун квадрат. Како је то могуће само ако је к = 0 или к = -1, то је x = 0, или x = -y. Прва могућност отпада (због $y \neq 0$), а друга даје решења y = 1, или y = - 1. Тада је x = - 1 или x = 1, па су сва решења: (0, 0); (-1, 1); (1, -1).

РЕШЕЊЕ 3. Нека су x и y ненегативни цели бројеви. Тада важе следеће (не)једнакости $x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leq (x + y)^2$. Једнакост важи ако је x = y = 0, а из неједнакости $xy < x + y$, добија се $(x – 1)(y – 1) < 1$, дакле $(x – 1)(y – 1) \leq 0$. То је испуњено само ако је x = 1 или y = 1. Решења дате једначине су: (0, 0); (1, -1); (-1, 1).

РЕШЕЊЕ 4: Како је $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$, то је $(1 - y^2)x^2 + xy + y^2 = 0$. Дата једначина има целобројних решења ако је њена дискриминанта $y^2 – 4(1 – y^2)y^2$ потпун квадрат, то јест ако је $1 – 4(1 – y^2) = к^2$. Решавањем једначине $4y^2 - к^2 = 3$ добијају се решења $y = 1$, или $y = -1$, па су решења дате једначине поред тривијалног (0, 0) још и (1, -1); (-1, 1). Решење је добијено коришћењем дискриминанте. Δ

Оба примера показују да решавање Диофантових једначина није праволинијски посао и да један исти задатак може бити решен коришћењем различитих поступака раздвајања случајева. У изложеним примерима су коришћени производ, количник, дељивост, неједнакости и дискриминанта, при чему је сигурно да постоје и друга решења која својом концизношћу и елеганцијом не заостају за претходним.

За разлику од учења решавањем проблема, које је присутно у скоро сваком облику рада са даровитима у области математике, учење решавањем проблема на више начина је такав методички модел који се примењује само повремено, када за то има прилике, тј. када сама наставна тема наметне могућност више лепих и разноврсних решења.

Скоро све методе решавања Диофантових једначина, а поготову оне у којима се користе разне алгебарске трансформације, се могу реализовати коришћењем методичког моделом учења решавањем проблема. За такво учење је неопходно стрпљење, јер наставник не сме бити тај који после два-три неуспешна покушаја ученика покаже решење проблема. Зато је најбоље овај методички модел примењивати припремајући ученицима квалитетне материјале[307] са систематичним избором проблема. Проблеми се увек задају редоследом од лакшег ка тежем и кад год је то могуће по степенастом принципу, што подразумева да сваки следећи проблем тражи од ученика за нијансу већи интелектуални напор него претходни и за корак сложенију идеју од оних које су већ постале ученикова интелектуална својина.

9.2.4. ММ 8. - ИНТЕРАКТИВНА НАСТАВА

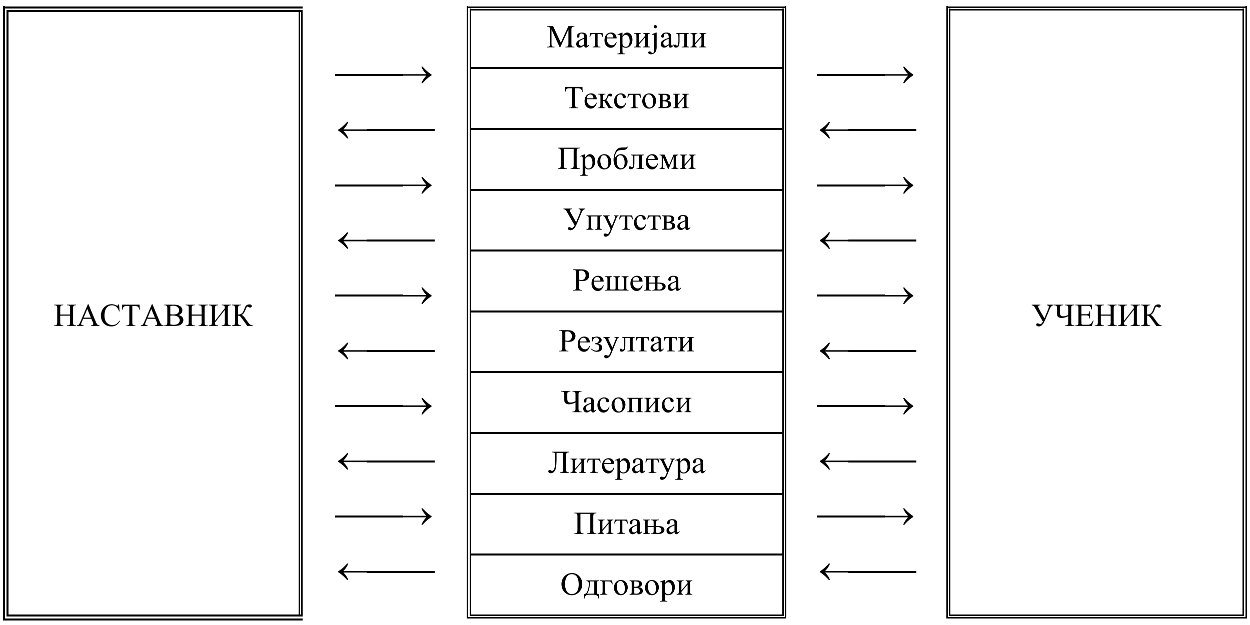
Интерактивна настава се заснива на сталној комуникацији између ученика и наставника или ученика и ученика и представља један од најактивнијих и најхуманијих методичких захвата у раду са даровитима, који су по некад прилично затворени и заокупирани разним математичким проблемима и којима је комуникација са околином приличан проблем. Интерактивно учење разбија те комуникацијске баријере, омекшава традиционални однос ученик-наставник, изграђује поверење и успоставља сараднички однос између ученика и наставника.

[307] Ово се нарочито односи на припрему ученика за математичка такмичења и најбоље је да ученици задатке решавају код куће, а решења демонстрирају на часу додатне наставе

Интеракција ученик – наставник подразумева не само разбијање једног односа који почива на ауторитету наставника по дефиницији, већ и превазилажење свих недостатака разредно-часовног система. Ученик и наставник се не виђају и не комуницирају само у току часова редовне или додатне наставе, већ и у другим приликама, кад год се за то укаже потреба. Уз то комуникација је разновсна: директна, преко писаних материјала (задаци, упутства, решења, текстови, часописи, литература ...), телефонска комуникација, комуникација путем електронске поште ...

У интерактивном учењу се повећава активност и ученика и наставника. А наставник није више у позицији да само преноси знања и тражи одговоре. Даровити траже проблеме којима ће се бавити, али и одговоре на оно што њих интересује: коришћене формулације, решења проблема које нису успели да реше; теоријске основе које нису успели да до краја разјасне.

Организационо гледано интерактивно учење се одвија у континуитету и сталном повратном дејству, са увећаном стваралачком продукцијом и ученика и наставника. Интерактивно учење се у том смислу може приказати следећом схемом:



Међутим, данашњи развој технологије, нарочито у сфери персоналних рачунара и коришћења Интернета пружа велике могућности за интерактивно учење, јер ученик и наставник могу комуницирати скоро свакодневно коришћењем електронске поште, чиме комуникација добија на фреквентности, динамици, а наравно и на квалитету. При свему овом ваља напоменути, да потпуно идентичан процес, са небитно измењеним параметрима може бити и интерактивно учење на релацији ученик – ученик.

Чак се може направити и читава интерактивна група - математички форум, [308] коју чине један или више наставника и неколико ученика, који путем сталне размене информација сваког дана у сваком погледу по мало напредују.

Ефекти оваквог начина рада експериментално су истраживани су на теми "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" и овде дајемо сценарио по коме је радила експериментална група:

Настава је планирана и реализована по макро-структурном моделу који је карактеристичан за сваки наставни систем[309] а чине га осмишљена активност на програмирању припремања, усвајања нових наставних садржаја, увежбавања, понављања и проверавања, при чему се наредна активност логично проистиче из претходне.

Свака од претходно наведених макро-структурних наставних активности брижљиво је планирана коришћењем микро-стуктурног модела, што значи да је свака од наставних активности прецизно дефинисана по циљу, задацима, методама, средствима и облицима рада.

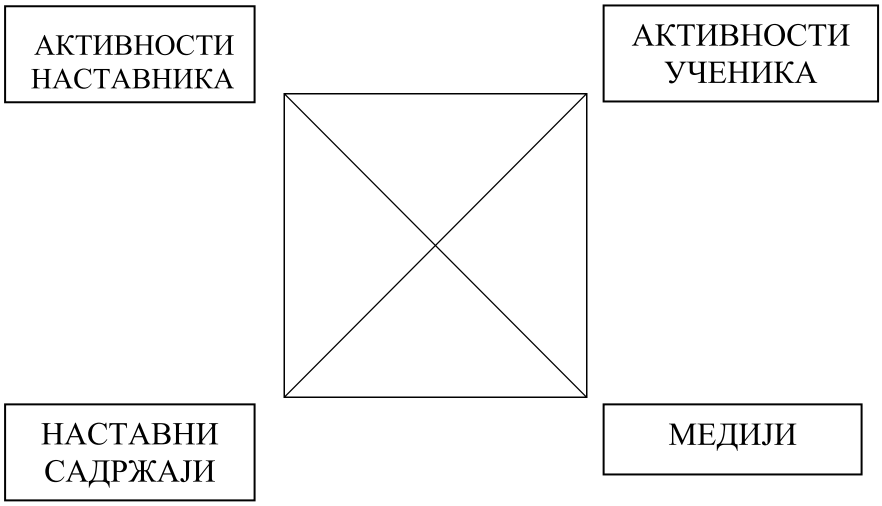
И макро и микро структура подлежу детаљној анализи у оквиру дидактичког четвороугла (видети схему на наредној страни) кога чине четири основна фактора сваке квалитетне наставе: активности наставника, активности ученика, наставни садржаји и медији.[310]

Елементи дидактичког четвороугла нису случајно повезани свим могућим везама, јер само добра корелација између свих елемената система даје оптималне наставне ефекте. Зато планирање и програмирање наставе није могуће без узимања у обзир међусобних узрочно-последичних веза између свих елемената система и зато интерактивна настава има велике шансе за успех само ако је оставрена максималну синхронизација унутар свих елемената система.

308 О овоме је већ било речи код коришћења рачунара у раду са даровитима и интерактивним форумом специјализованих одељења Ваљевске гимназије који раде на адреси spec-mat-vg@yahoogroups.com

309 Видети: [9.169.] Ђукић, Мара: Дидактички чиниоци идивидуализоване наставе – Нови Сад, 1995. - стр. 76.

310 Видети: [9.169.] Ђукић, Мара: Дидактички чиниоци идивидуализоване наставе – Нови Сад, 1995. - стр. 99.



Наставни модел интерактивне наставе подразумева детаљну разраду сваког од задатих елемената модела. Дакле дефинисање сваког од основних фактора наставе по свакој од макро-структурних активности и сваком од микро-структурних елемената.

Модел интерактивне наставе примењен је на наставноу тему "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости". За ову наставну тему смо се определили због тога што њени садржаји синтетизују знања из елементарне теорије бројева и елементарне алгебре и омогућују широку лепезу могућих идеја за решавање појединих класа Диофантових једначина.

Наставна тема је реализована кроз два уводна часа методолошке природе, потпуно независна од наставне теме "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости". и четири наставна часа усмерена директно на реализацију садржаја везаних за изабрану наставну тему.

У оквиру припреме ученика за наставну тему реализовани су садржаји:

1. Интерактивна настава и коришћење рачунара као комуникацијског средства;
2. Како ћу решити математички задатак?

У оквиру наставне теме реализоване су следеће наставне јединице:

1. Метод разликовања случајева и неједнакости;
2. Неједнакости бројева и Диофантове једначине;
3. Неједнакости алгебарских израза и Диофантове једначине;
4. Увежбавање решавања Диофантових једначина коришћењем неједнакости.

Дефинисање свих елемената интерактивне наставе у сфери активности наставника и активности ученика дате су обједињено у наредне две табеле, а наставни садржаји и медији се анализирају посебно кроз сценарио и коментар сценарија за сваки наставни час посебно.

1. АКТИВНОСТИ НАСТАВНИКА

	ПРИПРЕМАЊЕ	УСВАЈАЊЕ НОВИХ САДРЖАЈА	ВЕЖБАЊЕ	ОБНАВЉАЊЕ	ПРОВЕРАВАЊЕ
ЦИЉ	▪ Дефинисање свих фаза реализације наставе	▪ Презентација коришћења неједнакости у решавању Диофантових једначина	▪ Оспособити ученике за самостално решавање Диофантових једначина	▪ Заокруживање примене неједнакости у решавању Диофантових једначина	▪ Утврђивање наставних ефеката
ЗАДАЦИ	▪ Корекција предзнања ученика ▪ Пажљив избор наставних садржаја ▪ Избор карактеристичних Диофантових проблема ▪ Припремање неопходних наставних материјала	▪ Специфична обука ученика у коришћењу рачунара ▪ Упознавање са алгоритмом "Како ћу решити математички задатак?" ▪ Упознавање са методом разликовања случајева ▪ Коришћење неједнакости за разликовање случајева	▪ Помоћ ученицима у решавању датих проблема: објашњењима, упутствима, идејама, упућивањем на литературу	▪ Обнављање опште идеје ▪ Анализа проблема ▪ Анализа решења ▪ Мотивација ученика за рад на финалном тесту	▪ Конструисање теста ▪ Обрада резултата теста ▪ Анализа теста ▪ Припремање корективних елементата
МЕТОДЕ		▪ Проблемска настава ▪ Практичан рад на рачунару	▪ Интернет комуникација са ученицима		▪ Писмено проверавање
СРЕДСТВА	▪ Иницијални тест знања из теорије бројева	▪ Радни материјал ▪ Power Point презентација	▪ Радни материјал ▪ Интернет ▪ Литература	▪ Радни материјал ▪ Интернет ▪ Литература	▪ Финални тест знања из Диофантових једначина
ОБЛИЦИ	▪ Индивидуални рад наставника	▪ Фронтални рад са ученицима	▪ Интерактивни рад са ученицима	▪ Групни рад са ученицима	▪ Фронтални рад

2. АКТИВНОСТИ УЧЕНИКА

	ПРИПРЕМАЊЕ	УСВАЈАЊЕ НОВИХ САДРЖАЈА	ВЕЖБАЊЕ	ОБНАВЉАЊЕ	ПРОВЕРАВАЊЕ
ЦИЉ	▪ Припремање за квалитетно усвајање знања	▪ Савладати решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости	▪ Самостално решавање Диофантових једначина	▪ Заокруживање примене неједнакости у решавању Диофантових једначина	▪ Утврђивање сопствених знања везаних за решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
ЗАДАЦИ	▪ Обнављање садржаја из основне школе везаних за теорију бројева	▪ Упознати се са методом разликовања случајева ▪ Научити да се позната неједнакост искористи за разликовање случајева ▪ Обучити се за коришћење рачунара за комуникацију са наставником и друговима	▪ Примена стечених искустава на решавање нових проблема ▪ Формулисање нових проблема ▪ Припрема питања за наставника и остале ученике	▪ Систематизација сопствених решења проблема ▪ Презентација проблема решених на више начина ▪ Презентација нових самостално формулисаних проблема ▪ Презентација евентуалних општих сазнања ▪ Постављање питања	▪ Још једном прегледати све садржаје ▪ Мотивисати се за што бољи резултат
МЕТОДЕ		▪ Проблемска настава ▪ Практичан рад на рачунару	▪ Интернет комуникација са наставником и осталим ученицима		▪ Писмено проверавање
СРЕДСТВА	▪ Иницијални тест знања из теорије бројева	▪ Радни материјал ▪ Power Point презентација	▪ Радни материјал ▪ Интернет ▪ Литература	▪ Радни материјал ▪ Интернет ▪ Литература	▪ Финални тест знања из Диофантових једначина
ОБЛИЦИ	▪ Индивидуални рад ученика	▪ Фронтални рад	▪ Интерактивни рад	▪ Групни рад ученика и наставника	▪ Фронтални рад

3. НАСТАВНИ САДРЖАЈИ

1. УВОДНИ ЧАС

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Оспособљавање ученика за стално и квалитетно учење
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Коришћење рачунара као средства комуникације
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за коришћење рачунара као средства комуникације са ученицима и наставницима
ТИП ЧАСА:	Час стицања практичних знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод демонстрације
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад и рад у паровима
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Рачунар, Интернет и видео бим, PP през, PDF документ
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	45 – 60 минута

У уводном делу часа ученици се уводе у проблематику комуникације и њене важности за човека 21. века. Посебна пажња се посвећује личној комуникацији, комуникацији путем телефона и комуникацији коришћењем писма.

Рад на остваривању првог дела образовних циљева часа креће од коришћења Outlook Expressa за креирање, отпремање, пријем и меморисање електронске поште. У овом делу наставног рада ученици решавају следеће задатке:

<u>ЗАДАТАК 49</u>. Коришћењем Интернет форума специјализованих математичких одељења чија је адреса spec-mat-vg@yahoogroups.com пошаљи поруку која ће садржати једантекстуални математички проблем по твом избору.

<u>ЗАДАТАК 50.</u> Прегледај приспеле поруке са Интернет форума чија је адреса spec-mat-vg@yahoogroups.com и одабери проблем који ти се чини најједноставнији за решавање. Одштампај добијену поруку, а потом пошаљи поруку аутору програма (дакле не свим учесницима форума) и кратко се захвали на добијеном проблему. Исту поруку пошаљи и професору на адресу vandric@beotel.yu.

У другом делу часа ученици се обучавају да коришћењем Microsoft Worda и програма Microsoft Equation 3.0 записују математички текст и математичке формуле. Посебно се објашњава значај File Attachmenta за отпремање текстуалних и других прилога. После теоријских објашњења ученици добијају следеће конкретне задатке:

<u>ЗАДАТАК 51</u>. Коришћењем Интернета прочитај електронску поруку која има Subjekt ZADATAK 1. Отвори фајл који се налази у Attachment-у и реши добијени задатак.

<u>ЗАДАТАК 52.</u> Решење проблема из претходног задатка откуцај у Microsof Wordu и коришћењем Attachmenta пошаљи себи (ради контроле) и свим учесницима Интернет форума чија је адреса spec-mat-vg@yahoogroups.com.

У завршном делу часа врши се кратка рекапитулација урађеног и ученици се упућују на домаћи задатак следеће садржине:

<u>ЗАДАТАК 53.</u> Прикључи се на Интернет и посредством Outlook Exspress-а отвори поруку чији је Subjekt – Domaci zadatak. Порука у Attachmenta садржи два три документа.

а) Отвори добијени Microsof Word документ, реши добијене проблеме и решења проблемаа откуцај у Microsof Wordu и коришћењем Attachmenta у року од 24 сати пошаљи себи (ради контроле) и свим учесницима Интернет форума чија је адреса spec-mat-vg@yahoogroups.com.

b) PDF текст и Power Point презентацију данашњег наставног рада, прочитај и сачувај да би се мог-ао(ла), када затреба, подсетити свих научених поступака.

<u>2. УВОДНИ ЧАС</u>

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Оспособљавање ученика за стално и квалитетно учење
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Како ћу решити математички задатак?
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема
ТИП ЧАСА:	Час примене стечених знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад, групни рад и индивидуални рад
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Наставни материјал 2, рачунар и Интернет, PP презент.
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	45 – 60 минута

У уводном делу часа ученицима се даје следећи математички проблем:

<u>ЗАДАТАК 54.</u> На колико различитих начина Влада, Нада и Јагода могу да поделе 100 бомбона, а да свако од њих добије макар једну бомбону.

Уколико један или више ученика имају решење прелази се на анализу добијених решења. Дакле идеје и корака који су довели до решења. Потом се прелази на задатак: .

<u>ЗАДАТАК 55.</u> Дат је четвороугао ABCD. Користећи лењир и шестар конструисати квадрат MNPQ чија је површина једнака површини датог четвороугла.

Уколико ученици немају решење првог проблема, ток решавања проблема следи већ упознати алгоритам:

ПРВО	**РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА**	**РАЗМИШЉАЊА - ОДГОВОРИ**
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▪ Шта је непознато? ▪ Шта је задато? ▪ Како гласи услов?	▪ Број начина на који се може извршити подела ▪ Број бомбона - 100 ▪ Свако мора добити бар једну бомбону
	▪ Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?	▪ Са условом је све у реду, јер не омета решавање проблема ни у једном погледу, а није ни контрадикторан
	▪ Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!	▪ Ако број бомбона које добију Влада, Нада и Јагода редом означимо са x, y и z, онда је наш проблем сведен на једначину $x + y + z = 100$, уз услове: $1 \le x \le 98$, $1 \le y \le 98$, $1 \le z \le 98$. ▪ Цртеж би могао да изгледао овако $\underbrace{* * * * \ldots * * * * \ldots * * * *}_{100}$
	▪ Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?	▪ Двоје могу да добију само по 1 бомбону.
ДРУГО	**ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА**	
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!	▪ Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?	▪ Да али са врло малим бројевима (напр. 7, 8), па се број могућности могао лако пребројати.
	▪ Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?	▪ Нисам видео ниједну теорему која директно решава дати проблем

АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ. НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!	▪ Ако се фиксира непозната z онда би се проблем свео на једначину са две непознате: $x + y = n$. ($1 \le x \le n - 1$; $1 \le y \le n - 1$).
	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак!	▪ Ако је $x + y = n$, онда дата једначина има решења $(1, n-1)$; $(2, n-2)$; $(n-2, 2)$ и $(n-1, 1)$. Дакле једначина $x + y = n$ има тачно n-1 решење.
		▪ Сада је могуће решавати једначину по фиксираним z и на крају сабрати број добијених решења.
ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**	
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?	▪ За $z = 1$, добија се једначина $x + y = 99$, која има 98 решења. За $z = 2$, добија се једначина $x + y = 98$ која има 97 решења ... За $z = 97$, добија се једначина $x + y = 3$ која има 2 решења и за $z = 98$ добија се једначина $x + y = 2$ која има 1 решење. Дакле укупан број решења, тј. начина је $98 + 97 + ... + 2 + 1 = (98 \cdot 99):2 = 99 \cdot 49 = 4851$.
ЧЕТВРТО	**ПРОВЕРА**	
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ?	▪ Нјалакша провера је ако се проблем реши на други начин
	▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед?	▪ Може коришћењем "преграда". Дакле, на датој слици се могу поставити две преграде које бомбоне деле на три скупа. Како се две преграде могу поставити на 99 места то је укупан број могућности једнак броју комбинација од 99 елемената 2 класе, дакле опет $(98 \cdot 99):2 = 99 \cdot 49 = 4851$.
	▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?	▪ Наравно. Неки од могућих проблема су дати за домаћи задатак

У другом делу часа приказује се решење другог задатка који се анализом и применом алгоритма растављa на три подзадатака (конструктивна трансформација четвороугла у троугао, троугла у правоугаоник и на крају правоугаоника у квадрат једнаке површине).

За увежбавање ученици добијају следеће проблеме:

<u>ЗАДАТАК 56.</u> *Ако је n природан број, колико решења у скупу природних бројева има једначина $x + y + z = n$?*

<u>ЗАДАТАК 57.</u> *На колико начина Влада, Нада и Јагода могу поделити n јабука, тако да неко од њих може остати без иједне јабуке?*

<u>ЗАДАТАК 58.</u> *Конструисатиправилни шестоугао чија је површина једнака збиру површина датог четвороугла ABCD и датог петоугла MNPQR..*

1. НАСТАВНИ ЧАС

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Метод разликовања случајева и неједнакости
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема (на примеру Диофантових једначина)
ТИП ЧАСА:	Час примене стечених и стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора и метод експеримента
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад, групни рад и индивидуални рад
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Наставни материјал 3, литература, рачунари, Интернет
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	45 – 60 минута

Уводни део часа искоришћен је за објашњавање суштине методе разликовања случајева и логичке основе метода садржане у чињеници да се домен сваке Диофантове једначине може посматрати као унија његових дисјунктних подскупова у којима дата једначина има неку специфичну карактеристику.

Пошто су у илустровању општег метода веома важни уводни примери на основу којих се код ученика ствара ментална слика о суштини метода, за почетну илустрацију метода разликовања случајева, примењеног на неједнакости, изабрани су следећи проблеми:

<u>*ЗАДАТАК 59.*</u> *Дате су једнакости:* $* + * = * - * = * \cdot * = * * : *$. *Уместо звездица у датим једнакостима напиши цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 тако да се свака цифра употреби тачно једном и да све једнакости буду тачне.*

<u>*ЗАДАТАК 60.*</u> *Одредити решења једначине* $x^2 - 5x + 4 + 2y^4 = 0$, *ако су* x *и* y *цели бројеви.*

Изабрани су наведени уводни примери управо због тога што одлично илуструју разликовање случајева коришћењем неједнакости код коначних и бесконачних домена.

Код првог проблема, има укупно 9! могућности, што је за анализу велики број. Међутим, ако се резултат једнакости обележи са A, онда је $3 \leq A \leq 8$, јер најмањи могући збир је $1 + 2 = 3$, а највећа могућа разлика је $9 - 1 = 8$. Према томе разликује се свега 6 случајева: A = 3, A = 4, A = 5, A = 6, A = 7 и A = 8, што проблем чини решивим.

У другом случају домен једначине је практично скуп Z^2. Међутим, како је увек $2y^4 \geq 0$, то мора бити $x^2 - 5x + 4 \leq 0$. Дакле $(x - 1)(x - 4) \leq 0$. Како је решење дате неједначине $1 \leq x \leq 4$, то је практично проблем сведен на само четири могућности: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и $x = 4$.

Разлика између класичне и интерактивне наставе је у томе што се код класичне наставе ученицима једноставно предоче два дата проблема и њихово решење, а код интерактивне наставе догађа процес који се једноставно назива <u>интеракција</u> (у буквалном преводу – међусобна акција).

Како се обезбеђује интерактивност наставе?

Интерактивност наставе се огледа у сталној комуникацији наставника са ученицима и међусобној комуникацији ученика. Комуникација, тј. интерактивност се најчешће обезбеђује питањима, али и упутствима, сугестијама, разменом идеја... чиме се уместо саопштавања готових мисли наставника добија процес у коме до истих или сличних закључака сопственом мисаоном активношћу долазе сами ученици. Зато овде наводимо питања, упутства, сугестије преко којих је остварена интерактивност у претходним задацима, уз напомену да вешт наставник никада не поставља сва наведена питања, већ се понаша рационално и на једноставнија питања се враћа само у случају када нема одговора на сложенија питања:

ЗАДАТАК 59:

Одакле почети у решавању датог проблема?

Ако резултат свих датих операција обележимо са A, шта можемо закључити о броју A?

Колико највише цифара може имати број A?

Колико највише, а колико најмање може бити збир датих бројева?

Колико највише, а колико најмање може бити разлика датих бројева?
Да ли је могуће одредити у којим границама се креће број А?
Да ли је потребно да анализирамо производ и количник датих бројева?
Колико највише, а колико најмање може бити производ датих бројева?
Колико највише, а колико најмање може бити количник датих бројева?
Да ли вам добијени подаци нешто казују?
Шта можемо из претходних података закључити о броју А?
Колико могућих случајева разликујемо?
Зашто А није 3? Може ли А бити 4? Зашто А не може бити 5?
Може ли А бити 6? Да ли је А једнако 7? Може ли А бити 8?
Постоји ли неки други начин за решавање проблема?

ЗАДАТАК 60:

Које су могуће идеје за решавање дате једначине?
Каквог је знака израз $2y^4$? Каквог знака тада мора бити израз $x^2 - 5x + 4$?
Шта се из неједнакости $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ добија?
Које вредности узима непозната x?
Колико решења има дата једначина?

У преосталом делу часа на сличан начин се решавају следећи проблеми:

ЗАДАТАК 61. *Збир двоцифреног броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом поретку је потпун квадрат. О ком броју је реч? Колико има решења?*

ЗАДАТАК 62. *Одредити природне бројеве x и y тако да је* $1! + 2! + \ldots + x! = y^2$.

Ученици за рад код куће добијају следеће задатке:

ЗАДАТАК 63. *Дешифровати квадрирање* $(5c+1)^2 = \overline{abcd}$ *ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре. (1996)*

ЗАДАТАК 64. *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да је* $y - x^3 = y^4 - 16x$.

ЗАДАТАК 65. *Дата је једначина:* $1 \cdot 1! + \ldots + x \cdot x! = y^4$. *Колико решења у скупу природних бројева има дата једначина?*

Међутим, поред конкретних проблема ученици добијају упутство за интерактивни рад у току решавања задатака које садржи следеће конкретне инструкције:

1) Задатке решавати по узору на задатке рађене у школи.

2) Конкретно упутство за задатак 63, није потребно јер је из услова задатка јасно у којим границама се налази број 5c + 1, па према томе и број c.

3) Код задатка 64. трансформисати дату једначину тако да се лако издифере-нцира знак једне од страна једнакости.

4) У задатку 65. поједноставити леву страну једнакости тако што ћеш претхо-дно доказати да је $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + x \cdot x! = (x + 1)! - 1$.

5) Покушајте да при решавању сваког проблема замислите над питањима сличним онима која су била присутна у току рада у школи.

6) При решавању задатака дозвољен је колективан рад, личне, телефонске и Интернет консултације.

7) За сваку потребну помоћ, евентуална питања и размену идеја користити једну од e-mail адреса: vandric@beotel.yu или spec-mat-vg@yahoogroups.com.

8) Домаћи задатак решити у року од 72 часа и доставити на електронске адресе које су већ дате.

2. НАСТАВНИ ЧАС

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Неједнакости, бројеви и Диофантове једначине
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема (на примеру Диофантових једначина)
ТИП ЧАСА:	Час примене стечених и стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора и метод експеримента
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад, групни рад и индивидуални рад
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Наставни материјал 4, литература, рачунари, Интернет
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	45 – 60 минута

Други наставни час започиње анализом решења проблема који су решавани за домаћи задатак, а потом се прелази на упознавање са Диофантовим једначинама и проблемима у којима се тражи одређивање природних бројева који припадају класи бројева са прецизно дефинисаним особинама.

Иако су слични проблеми већ решавани, проблематика Диофантових једначина овог типа илуструје се следећим примерима:

<u>*ЗАДАТАК 66.*</u> *Постоји ли четвороцифрен природан број који је једнак четвртом степену збира својих цифара?*

<u>*ЗАДАТАК 67.*</u> *Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.*

Проблеми се, као и на претходном часу, решавају квалитетном комуникацијом наставника и ученика. Могућа питања за задатак 66. су:

Како се дати проблем може превести на математички језик?
Да ли се коришћењем добијене једнакости може ограничити збир цифара?
Зашто збир цифара мора бити већи од 5 и мањи од 10?
Колико могућности има? Колико решења има?

Кад је реч о задатку 67. актуелна су следећа питања:
Како се дати проблем може превести на математички језик?
Која је идентична трансформација најпродуктивнија за његово решавање?
Да ли једна од страна трансформисане једнакости има константан знак?
Шта се може закључити из добијене неједнакости?
Колико могућности има? Колико решења има?

У делу часа намењеном за увежбавање ученици решавају следеће проблеме:

<u>*ЗАДАТАК 68.*</u> *Одредити цифре a, b и c и природан број n, тако да је* $a + \overline{bb} + \overline{ccc} = n^4$. *Колико има решења?*

<u>*ЗАДАТАК 69.*</u> *Одредити све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају остатак једнак збиру квадрата својих цифара.*

Домаћи задатак:

<u>*ЗАДАТАК 70.*</u> *Постоји ли троцифрен природан број који је једнак збиру четвртог степена цифре стотина, куба цифре десетица и квадрата цифре јединица?*

<u>*ЗАДАТАК 71.*</u> *Да ли постоји природан број који је једнак збиру квадрата својих цифара?*

<u>*ЗАДАТАК 72.*</u> *Одредити све природне бројеве чији је квадрат једнак петом степену збира његових цифара.*

Ученицима је уз дати домаћи задатак, упућени на одговарајућу литературу и уз упутство са претходног часа на додатно упутство за конкретне проблеме:

1) Задатак 70. решавате по узору на задатак рађен у школи.

2) У задатку 71 је збир цифара n-тоцифреног броја увек је мањи или једнак 9n.

3) Код задатка 72. искористити чињеницу да је збир цифара n-тоцифреног броја увек мањи од 10n и одредити колико највише цифара може да има дати број.

3. НАСТАВНИ ЧАС

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Неједнакости, алгебарски изрази и Диофантове једначине
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема (на примеру Диофантових једначина)
ТИП ЧАСА:	Час примене стечених и стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора и метод експеримента
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад, групни рад и индивидуални рад
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Наставни материјал 5, литература, рачунари, Интернет
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	45 – 60 минута

У уводном делу часа анализирају су домаћи задаци, а предмет посебне анализе је Интернет комуникација ученика и професора.

У току овог часа треба савладати коришћење неједнакости алгебарских израза за раздвајање случајева при решавању Диофантових једначина. И овај поступак је већ коришћен, али у најједноставнијем облику, када се добијени алгебарски израз и са леве и са десне стране ограничава конкретним бројевима. Циљ овог часа је да се покаже како се неједнакости користе при решавању Диофантових једначина тако што се добијени алгебарски израз умеће између два "израза" чувара и потом погодним раздвајањем случајева добија решење.

ЗАДАТАК 73. Одредити све просте бројеве p, такве да је збир свих делилаца броја p^4 потпун квадрат.

Дати проблем своди се на једначину $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$. Идеја је да се израз $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ који је потпун квадрат лоцира између два друга квадрата и на тај начин определи могући интервал у коме проблем има решење. С обзиром да је једноставније оперисати са целобројним него са рационалним коефицијентима добија се екввивалентна једначина $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$ и одговарајуће неједнакости $p^2 + 4p^3 + 4p^4 = (p + 2p^2)^2 < 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2 < 4 + 4p + 8p^2 + 4p^3 + 4p^4 = (2 + p + 2p^2)^2$. Како је у интервалу $(2p^2 + p, 2p^2 + p + 2)$ једини квадрат $(2p^2 + p + 1)^2$ јасно је да је $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2 = (2p^2 + p + 1)^2$.

Пут до исказаног решења води опет преко интеракције и низа излистаних идеја, постављених питања и смисаоних одговора. Даљи рад се одвија кроз сличне или у неколико различите проблеме у којима се користи чињеница да су дате Диофантове једначине облика F (x, y, z) = 0 при чему је F симетрична функција:

ЗАДАТАК 74. Одредити све природне бројеве x, y и z такве да је $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

ЗАДАТАК 75. Дата је једначина $xy + yz + zx - xyz = 2$. *Одредити све уређене тројке (x, y, z) природних бројева x, y и z које задовољавају дату једначину.*

Домаћи задатак:

ЗАДАТАК 76. Постоје ли природни бројеви x и y чији је производ осам пута већи од њиховог збира?

ЗАДАТАК 77. Постоје ли различити природни бројеви a, b, c, d такви да је $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$?

ЗАДАТАК 78. Колико уређених парова (x, y) целих бројева x и y задовољава једнакост $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

Упутство за реализацију домаћег задатка садржи све елементе као и претходна уз конкретне напомене да се интензивније користи Интернет и да се у решавању задатих проблема води рачуна о следећем:

1) Код задатка 76. треба користити неједнакост као метод разликовања случајева, а не производ, количник, дељивост.

2) У задатку 77. треба применити исту идеју као код задатка 74.

3) Задатак 78. је сличан 73, али треба водити рачуна о томе да су x и y цели бројеви и због тога пажљиво конструисати неједнакости.

4. НАСТАВНИ ЧАС

Последњи наставни час у овом циклусу предвиђен је за увежбавање садржаја. Због тога се сценарио часа конструише тако да се час дели у три целине од којих се прва посвећује анализи домаћих задатака, а друга питањима и идејама ученика у вези са до сада урађеним материјалом. Трећа целина се предвиђа за нове проблеме чије решавање се заснива на идејама релативно сличним већ коришћеним. С обзиром на немогућност предвиђања времена за прве две фазе рада, план је да материјал који се не реализује на часу препусти да га ученици код куће савладају самосталним радом опет уз добијена упутства и могућност личне, телефонске и Интернет комуникације.

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Примена неједнакости на решавање Диофантових проблема
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Оспособљавање ученика за самостално решавање математичких проблема (на примеру Диофантових једначина)
ТИП ЧАСА:	Час увежбавања и систематизације стечених знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод експеримента и метод разговора
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални рад, групни рад и индивидуални рад
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Наставни материјал 6, литература, рачунар, Интернет
ВРЕМЕ РЕАЛИЗАЦИЈЕ:	Наставни рад је реализован у току 45 минута

Предвиђено је решавање следећих проблема:

ЗАДАТАК 79. Одредити све природне бројеве x и y тако да је $x! + 2 = 1999$.

ЗАДАТАК 80. Одредити све парове природних бројева (x, y) тако да важи једнакост: $10^x + 11y = x + 2000$.

ЗАДАТАК 81. Одредити све природне бројеве a, b, c, d, e такве да је $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$, *ако бројеви испуњавају услов:* $2 < a < b < c < d < e$. *(1995)*

Код првог се разликовање случајева обавља лако и брзо; код другог споро и уз доста анализе, а трећи не садржи нову идеју већ само тражи брзу и квалитетну техничку реализацију.

За домаћи задатак остају следећи задаци:

ЗАДАТАК 82. Доказати да једначина $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}=1$ *нема решењ, ако природни бројеви a, b, c, d, e испуњавају услов:* $2 \leq a < b < c < d < e$.

ЗАДАТАК 83. Одредити све природне бројеве a, b, c тако да они задовољавају релацију $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$. *(1996)*

Поред ових задатака ученици за домаћи задатак добијају и један фотокопирани материјал који садржи неколико Диофантових једначина са решењима.

D. МЕДИЈИ

Четврти, од основних фактора наставе су медији. Преко њих се остварјује интеракција наставник – ученик – наставни садржаји. Већа медијска подршка омогу-ћује богатију комуникацију (питања, одговори, упутства, проблеми решења ...) што сигурно утиче на интензитет интеракције.

У току реализације приказаног интерактивног блока коришћени су многи медији. Њихов попис и садржај дајемо у следећој табели:

РБ	НАЗИВ МЕДИЈА	ЧАС	НАЗИВ МАТЕРИЈАЛА	САДРЖАЈ
1.	ТЕКСТУАЛНИ МАТЕРИЈАЛИ	У1	"Математика и Интернет" (PDF формат)	Текст садржи податке о најважнијим математичким садржајима на Интернету
2.			"Проблеми за решавање" (WORD формат)	Задаци и упутства за комуникацију
3.		У2	"Како ћу решити математички задатак?"	Текст садржи алгоритам и пример његове примене (прилог 15.)
4.		Н1	"Метод разликовања случајева"	Текст садржи теоријски увод, примере и закључна разматрања (узето из теоријских основа: 88-92 стр.)
5.		Н2	"Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости"	Текст садржи примере, задатке за увежбавање и проблеме за решавање (прилог 17.)
6.			"Упутство за интерактивни рад"	Текст садржи домаћи задатак, упутство за решавање задатака и правила комуникације
7.		Н3	"Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости"	Текст садржи теоријски увод, примере и закључна разматрања (узето из теоријских основа: 98-100 стр.)
8.		Н4	"Неке Диофантоваке једначине"	Текст је на руском језику и садржи неколико задатака и њихова решења (фотокопирано)
9.	ВИЗУЕЛНИ МАТЕРИЈАЛИ	У1	"Математика и Интернет" (PP презентација)	Презентација садржи све потребне кораке за коришћење електронске поште као средства за комуникацију
10.		У2	"Како ћу решити математички задатак" (PP презентација)	Презентација садржи цео алгоритам са припадајућим примером и домаћим задатком
11.	ЕЛЕКТРОНСКИ МАТЕРИЈАЛИ	У1 Н4	Електронске поруке	Многобројна питања ученика и одговори наставника; упутства и питања наставника и одговори ученика везани за решавање добијених проблема

ММ 9. - УЗАЈАМНА НАСТАВА

Узајамно учење је такав методички модел у коме ученици уче једни од других, па се може рећи да постоји интеракција на релацији ученик - ученик. Иако се догађа да је оно што ученици излажу резултат њиховог индивидуалног учења, а све остало практично преношење научених садржаја, овај облик рада са даровитима има смисла, јер увек један број ученика (који нешто излажу), стављa у веома активну улогу. Уколико је то што млади математичари презентирају резултат неких њихових појединачних или групних истраживачких напора и уколико остали ученици активно учествују у приказивању добијених резултата, онда је узајамно учење доста повољан методички модел, јер је присутна значајна активност практично целе групе за додатни рад.

Дајемо два примера узајамне наставе. Прво је резултат самосталног проучавања теоријских основа од стране пет ученика које чини једну целину:

<u>СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:</u>

РАЗРЕД:	2. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Пелова једначина
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Пелова једначина и неке њене примене
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	1) Оспособљавање ученика за самоучење 2) Оспособљавање ученика за решавање Диофантових једначина Пеловог типа
ТИП ЧАСА:	Час стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод разговора (интерактивно учење)
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Индивидуална и групна припрема, а фронтални рад
ВРЕМЕ ТРАЈАЊА:	150 – 180 минута

Ученици добијају садржаје, али и тезе, конкретна упутства, литературу и Интернет адресе за припрему следећих получасовнних наставних тема:

- Г1: Пелова једначина и њено опште решење;
- Г2: Једначине Пеловог типа и њихово решавање;
- Г3: Примена једначина Пеловог типа на решавање диофантских проблема;
- Г4: Једначине Пеловог типа на математичким такмичењима;
- Г5: Примена рачунара у решавању једначина Пеловог типа.

Сви ученици добијене теме излажу по систему теоријски увод, примери примене, задаци за самосталан рад и упутстства за њихово решавање, писани материјали, тако да ако свака од пет одабраних група ангажује по једног ученика за сваки део излагања, могуће је активирати 10-15 ученика. Завршни део рада се може оставити за дискусију, питања, предлоге, формулисање нових проблема ...

Други пример када се успешно може користити узајамно учења је везан за приказивање резултата талентованих ученика у њиховим малим истраживачким подухватима који се односе на неке интересантне класе Диофантових једначина, поготову што се та истраживања могу поставити надовезујуће и комплементарно, што доприноси бољој мотивацији за праћење излагања.

СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:

РАЗРЕД:	2. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Квадратне Диофантове једначине
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Диофантова једначина $ax^2 + by^2 = cz^2$ $(a, b, c \in N)$
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	1) Оспособљавање ученика за мала истраживања 2) Проширивање знања о квадратној Диофантовој једначини
ТИП ЧАСА:	Час стицања нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Експериментални метод (учење путем "открића")
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Индивидуална и групна припрема, а фронтални рад
ВРЕМЕ ТРАЈАЊА:	150 – 180 минута

Ученици излажу своје резултате малих истраживања на следеће теме:

- Г1: Диофантова једначина $x^2 + y^2 = a$ $(a \in N)$ и њена решења;
- Г2: Диофантова једначина $x^2 + y^2 = az^2$ $(a \in N)$ и њена решења;
- Г3: Диофантова једначина $x^2 + ay^2 = z^2$ $(a \in N)$ и њена решења;
- Г4: Диофантова једначина $ax^2 + by^2 = z^2$ $(a, b \in N)$ и њена решења.
- Г5: Диофантова једначина $ax^2 + by^2 = cz^2$ $(a, b, c \in N)$ и њена решења.

Очигледно је да ма који од ова два модела узајамног учења буде коришћен, он тражи тимски и интерактивни рад ученик-ученик (јер се теме надовезују једна на другу) што сигурно представља додатни квалитет овог методичког модела. Улога наставника код оваквог типа учења је модераторска, али такође веома активна, јер он је практично главни координатор оваквог начина рада и адреса за све питања и дилеме.

Добро је ако се тема која се обрађује оваквим начином рада подели на довољан број талентованих ученика, тако да сви чланови групе за додатну наставу буду укључени у рад. Тиме се развија тимски дух и оптимално ангажовање сваког појединца. На тај начин је и мотивација ученика за рад подигнута на потребан ниво, а и видљиви су резултати сваког ученика.

ММ 10. - УЧЕЊЕ НА ДАЉИНУ

Један од облика интерактивног учења је и учење на даљину. За разлику од претходна два методичка модела интерактивног учења, учење на даљину се може реализовати и без директног контакта ученик-наставник или ученик-ученик. Довољно је на некој, а заинтересованим даровитим ученицима познатој Интернет адреси инсталирати осмишљен програм и одговарајуће садржаје о Диофантоваким једначинама.[311] Систем интерактивног рада је врло једноставан, јер ученици са одговарајућег сајта узимају дате материјале, изучавају их и решавају постављене задатке било да су они теоријске, практичне, или истраживачке природе.

Садржаји могу бити организовани по темама (слично као у овом раду). Свака тема се даље разбија на неколико тематских јединица које се презентирају по необавезујућој схеми: 1. Кратке теоријске напомене; 2. Уводни примери; 3. Задаци за увежбавање; 4. Проблеми са математичких такмичења; 5. Конкурсни задаци; 6. Проблеми за истраживање; 7. Литература, 8. Линкови; 9. Резултати; 10. Упутства; 11. Решења.

На сајту се налазе четири нивоа помоћи које ученици могу да користе следећим редом: литература, резултати, упутства и решења. Поред тих садржаја ученицима се омогућује да истакну своју пријаву за учешће у реализацији програма и да путем електронске поште комуницирају са ауторима програма, али и са другим учесницима у реализацији програма. Тиме се стварају сви потребни услови за интерактивни рад, јер ученик e-mail порукама може питати, проверавати своје ставове и решења, тражити упутства, допунску литературу ... Ученици на тај начин за сва питања, упитства и сву потребну комуникацију имају ментора, који није никаква електронска сила, већ жив човек који усмерава, упућује, предлаже и помаже да сваки корисник програма својим темпом иде напред. Али и човек који се над многим питањима и проблемима које су ученици поставили мора прописно замислити, а понекад и сам потражити неопходну помоћ. Ово чини овај систем рада динамичним, а материјале на Интернету отвореним и спремним на стално мењање, поправљање и допуњавање.

[311] Видети на Интернету сајт : http://www.Diofant.org . У оквиру овог сајта, чији су садржаји везани за ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ, погледати поглавље ИНТЕРАКТИВНО УЧЕЊЕ у оквиру кога се налазе материјали за највећи број тема које се односе на изучавање садржаја о Диофантовим једначинама

Међутим, поред већ познатих комуникационих релација ученик – наставник, ученик – литература, могућа је међусобна комуникација између свих ученика који учествују у реализацији датог програма, свих ученика са наставником-ментором за тај програм, ученичких наставника међу собом, ученичких наставника са ментором ... Резултат такве комуникације не мора да буде само добијање упутстава за решавање појединих Диофантових проблема, већ и много више од тога. Комуникацијом се могу исправити све могуће, а примећене грешке и поправити непрецизне формулације проблема.

Комуникацијом се свакој тематској јединици на сајту могу додати занимљиви проблеми који ту припадају. Интерактивним радом се сајт може обогатити новим садржајима, новим прилозима за активно учење, резултатима истраживачког рада ученика ... Најзад, на сајту се може организовати и конференција о свим методичким питањима везаним за реализацију наставних садржаја о Диофантоваким једначинама.

Оно што је најбитније, активно учење путем овако дефинисане интеракције нема никаква ограничења и може почети оног тренутка када то ученик, његов наставник или родитељ жели, наравно под условом да су сва потребна предзнања ту и да је ученику доступан рачунар. И темпо рада на материји није диригован, већ је директна последица прихваћености датих садржаја.

Могућности су сигурно и далеко веће, али конструкција програма за активно учење садржаја везаних за Диофантоваке једначине путем Интернета није у домену овога рада и отвара многа друга и шира методичка, наставна, образовна, па и опште-друштвена питања, која су универзална и могу се применити на било коју наставну тему у било којој области образовања.

Међутим, настава на даљину се може организовати и без специјализованог сајта, коришћењем потенцијала који постојећи садржаји на Интернету пружају. Приказујемо сценарио једног таквог веома једноставног, а корисног наставног подухвата:

СЦЕНАРИО НАСТАВНОГ РАДА:

РАЗРЕД:	3. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Додатна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Диофантове једначине степена већег од 2
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Диофантова једначина Маркова
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Упознавање ученика са једначином Маркова и његовим методом за добијање "дрвета" решења

ТИП АКТИВНОСТИ:	Стицање нових знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Метод рада на тексту
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Индивидуални, групни и фронтални рад
ВРЕМЕ ТРАЈАЊА:	Без ограничења

Радни задатак састоји се у посети сајту руског математичког часописа "Квант" који се налази на Интернет адреси http://kvant.mirror0.mccme.ru/1985/04/diofantovo_uravnenie_aamarkova.htm. Циљ је да се пронађе текст М. Крејна "Диофанова једначина А.А. Маркова". Текст је објављен у "Кванту" број 4. из 1985. године и садржи све елементе за квалитетно изучавање познате Диофантове једначине Маркова која има облик: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = к \cdot x_1x_2 ... x_n$ (к је природан број).

Упутства за рад су идентична претходним интерактивним пројектима, дакле могућа је лична, телефонска и Интернет комуникација са свим могућим питањима и запажањима. Ученици као радни задатак добијају да после проученог текста реше следеће проблеме:

<u>ЗАДАТАК 84</u>. Нека су x и y ненегативни цели бројеви. Одредити за које вредности природног броја к једначина $x^2 + y^2 = кxy$ иманетривијална решења.

<u>ЗАДАТАК 85</u>. Нека су x_1, x_2,, x_3 природни бројеви који задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 x_2 x_3$. Одредити сва решења дате једначине тако да је $x_j < 100$.

<u>ЗАДАТАК 86</u>. Нека су x_1, x_2,, x_3 природни бројеви који задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 x_1 x_2 x_3$. Колико решења има дата једначина?

<u>ЗАДАТАК 87</u>. За Диофантову једначину Маркова $x_1^2 + x_2^2 +...+ x_4^2 = 4x_1 x_2... x_4$ одредити првих неколико елемената у "дрвету" решења.

Занимљиво је да при оваквом раду и сам наставник пролази кроз процес учења, јер је немогуће учествовати у комуникацији а не знати о чему се ради.

9.3. ИНДИВИДУАЛНИ РАД УЧЕНИКА

Највећи део рада са даровитим ученицима се одвија индивидуалним активностима самог талентованог ученика. Рад у редовној и додатној настави, ма колико он био квалитетан и методички богат, неће имати оптималне домете, ако га не прати и вредан, динамичан, свеобухватан и осмишљен самостални рад самог даровитог ученика. При том опет, и овде, понављамо констатацију да методички модели које излажемо и предлажемо за коришћење у наставној пракси, нису потпуно "чисти", јер садрже, у мањој или већој мери, и елементе других методичких модела што сигурно није хендикеп, већ предност методичких модела које презентирамо.

И у овом делу приказујемо моделе учења који се најчешће користе у индивидуализацији наставе, уз напомену да као и у претходним методичким моделима, избор наставних садржаја и проблема није случајан, јер је он у највећој мери резултат вишегодишњег истраживачког трагања за најпогоднијим начинима презентације и усвајања богате материје Диофантових једначина у средњој школи.[312]

9.3.1. ММ 11. - РЕШАВАЊЕ КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА

Решавање конкурсних задатака је методички модел у коме ученик поред решавања датог проблема има још један додатни захтев, а то је да добијено решење презентира у што је могуће квалитетнијој форми (најчешће писмено, Интернетом или на неки други начин). Конкурсни задаци могу бити задаци из математичких часописа, задаци на разним такмичењима, али и они које задају сами наставници.

Једина, али веома битна разлика је да за решавање таквог проблема постоји и посебан мотив: објављивање решења у часопису, пласман на виши ступањ такмичења, књига или друга награда коју наставник поклања .

Јасно је да решавање конкурсних задатака опет није суштински нови методички модел, већ само специјални случај учења решавањем проблема, применом метода писања. Међутим, поред већ поменутих специфичности (реализује се самосталним радом ученика и има посебан мотивациони фактор) решавање конкурсних задатака има још једну посебност која је садржана у настојањима да се код даровитог ученика створи навика коректног образлагања и исписивања решења. Дакле, решења у коме неће бити позивања на тривијалност, очигледност и слично, него конституисања решења које квалитетно одсликава ученикову идеју, које је прецизно, јасно и без логичких и материјалних грешака.

Зато технолошка обука у исписивању решења није занемарљив методички захват и тражи сталну бригу наставника за верно преношење квалитетних мисли даровитог ученика на "документ" који се зове решење задатка. У том смислу би упутно било да се као што постоји алгоритам са популарним називом "Како ћу решити математички задатак", направи још један алгоритам – "Како ћу изложити решење математичког задатка".

<u>ЗАДАТАК 88</u>. Дата је једначина $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$. *Ако је* n *такав природан број да једначина има једно целобројно решење* (x, y), *доказати да онда једначина има бар три целобројна решења. Доказати да за* $n = 2891$ *једначина нема ниједно целобројно решење.*

[312] С обзиром да се у овом делу поглавља Методички модели излажу они методички поступци који се реализују углавном индивидуалним радом изостаће комбиновано приказивање сценарија наставног модела (табеларно + описно), јер ћемо убудуће користити само описно из разлога што се самосталан рад ученика тешко може унифицирати.

РЕШЕЊЕ: 1) Доказујемо први део тврђења. Нека је (x, y) решење дате једначине $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$. Како је $x^3 - 3xy^2 + y^3 = y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3 - 3x^2y + 3x^3 - x^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)(-x)^2 + (-x)^3 = n$, то је очигледно да је и уређени пар (y – x, - x) решење дате једначине. Како је коренсподенција $(x, y) \rightarrow (y - x, -x)$ једнозначна, то значи и да је и $(-x - (y-x), -(y - x)) = (-y, x - y)$ такође решење дате једначине, при чему се ова чињеница може и непосредено доказати.

Ако би нека од решења (x, y); (y – x, -x); (- y, x – y) била једнака онда је:

- $x = y - x$ и $y = -x$, па је $x = -2x$, одакле је $x = y = 0$;
- $x = -y$ и $y = x - y$, па је $y = -2y$, одакле је $y = x = 0$;
- $y - x = -y$ и $-x = x - y$, одакле је $y = -x = 0$, па је $x = y = 0$.

Како је тада у сва три случаја, $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n = 0$, то је немогуће, јер је претпоставка да је n природан број.

2) Доказујемо да за n = 2891 дата једначина нема ниједно решење. Како је $2891 = 9{\cdot}321 + 2$, то је $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891 \equiv 2 \pmod 9$.

Ма који цео број к има особину да $к^3$ при дељењу са 9 даје остатке –1, 0, 1. Разликују се следећи случајеви:

- Ако је $x^3 \equiv -1 \pmod 9$, онда је $y^3 - 3xy^2 = y^2(y - 3x) \equiv 3 \pmod 9$. Како y^2 не може при дељењу са 9 да даје остатак 3, то је $y^2 \equiv 1 \pmod 9$, а $y - 3x \equiv 3 \pmod 9$. Из последње релације је јасно да је y дељив са 3, што је противуречно са чињеницом $y^2 \equiv 1 \pmod 9$.
- Ако је $x^3 \equiv 0 \pmod 9$, онда је $y^3 - 3xy^2 = y^2(y - 3x) \equiv 2 \pmod 9$. Како y^2 не може при дељењу са 9 да даје остатак 2, то је $y^2 \equiv 1 \pmod 9$, а $y - 3x \equiv 2 \pmod 9$. Како је $x = 3к$, из последње конгруенције је јасно да је y облика $9к + 2$, па је $y^2 \equiv 4 \pmod 9$, што је противуречно са чињеницом $y^2 \equiv 1 \pmod 9$.
- Ако је $x^3 \equiv 1 \pmod 9$, онда је $y^3 - 3xy^2 = y^2(y - 3x) \equiv 1 \pmod 9$. Тада је $y^2 \equiv 1 \pmod 9$ и $y - 3x \equiv 1 \pmod 9$. Из $x^3 \equiv 1 \pmod 9$, следи да је x облика $3к + 1$ или $3к - 1$, тада је $3x + 1$ облика $9к + 4$ или $9к - 2$, што је противуречно са $y^2 \equiv 1 \pmod 9$.

Према томе ни један од разматраних случајева није могућ, па једначина за n = 2891 нема решења. Δ

Препорука за реализацију овог методичког модела може бити да ако нема конкурсних задатака, треба их измислити,[313] без обзира да ли ће конкурсни задаци бити из часописа или ће њихови аутори бити наставници. Конкурсне задатке могу припремити уз квалитетно упутство наставника и сами ученици, али то је већ посебна методичка тема о којој ће бити речи у овом раду.

[313] Искуства показују да ученици своје веома добре идеје и решења, због неувежбаности, врло често лоше прикажу приликом записивања решења проблема, што се увежбавањем може превазићи

9.3.2. ММ 12. - ДЕЛИМИЧНО ПРОГРАМИРАНО УЧЕЊЕ

Самостални рад ученика може се реализовати било у школи било код куће и методом рада на тексту, тј. конструкцијом делимично програмираних материјала, који поступно, корак по корак, ученика воде из проблема у проблем, из открића у откриће. У реализацији оваквог рада наставник је програмер, али и стални стручни консултант, при чему се консултације могу обављати на разне начине: личним контактом, телефоном, електронском поштом.

Ученику се у делимично програмираном материјалу нуде истраживања, закључци и открића и он се кроз решавање задатака, корак по корак води од лакших ка сложенијим проблемима, при чему сав креативни посао обавља самостално, експериментишући на задатој материји. Иако се чини да је на овај начин учење прилично усмерено, ученик користећи овај методички модел, исказује оно што је код сваког учења најважније: сврсисходну мисаону активност чији резултати га мотивишу за нова изучавања и релативно брз пролазак кроз задати материјал. Овај методички модел илуструјемо конкретним, полупрограмираним материјалом намењеним за реализацију наставне теме " Решавање Диофантових једначина коришћењем последње цифре".[314]

9.3.3. ММ 13. - САМОСТАЛНИ УЧЕЊЕ КОРИШЋЕЊЕМ ПРИПРЕМЉЕНОГ МЕТОДИЧКОГ МАТЕРИЈАЛА

Активнији однос ученика према материји која је предвиђена за реализацију може се остварити и индивидуалним радом ученика, било у оквиру часова додатне наставе у школи, било самосталним радом ученика код куће. Систем самосталног учења, и у овом случају, почива на коришћењу наставне методе рада на тексту и методичком материјалу који припрема наставник и који добијају одабрани ученици.[315] Најбољи материјал за самостално учење је онај материјал који је структуриран тако да ученика стави у што активнији положај, а да су при том садржаји који су дати за самостално учење одмерени и не превазилазе ниво математичких способности ученика на датом узрасту.

Материјал садржи одређене уводне примере, а потом се дају проблеми за увежбавање, проблеми са разних математичких такмичења и на крају конкурсни задаци, који имају за циљ да провере у којој мери је ученик оспособљен за самосталан рад на даљем проширивању и продубљивању материје. Саставни део материјала је и списак литературе која може помоћи у савладавању садржаја, а ученик се у сваком тренутку за помоћ може обратити и својим колегама који савладавају исту материју или свом наставнику који може дати конкретне сугестије и упутства за даљи рад.

[314] Пример делимично програмираног материјала дат је у Прилогу 16.

[315] Радни материјал "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости дат је у Прилогу 17. и коришћен је у току педагошког експеримента за рад са контролном групом

Сигурно је да материјал за самосталан рад ученика може бити и другачије структуриран и са другим избором задатака, али је из материјала видљиво да су у овом методичком моделу садржани и учењем путем решавања проблема и учење откривањем, а вероватно и други облици учења. Зато је индивидуални рад ученика један од најпогоднијих и напродуктивнијих облика рада са даровитима и један од најприхватљивијих методичких модела, јер активира ученика у највећој могућој мери.

ММ 14. - ИНДИВИДУАЛНО УЧЕЊЕ КОРИШЋЕЊЕМ ТЕКСТА

Активно учење се може реализовати и индивидуалним радом ученика на унапред припремљеном и методички обликованом тексту. Ученик се путем текста упознаје са најважнијим теоријским садржајима (и то је основна разлика у односу на претходни методички модел који садржи само методички дистрибуиране решене примере и задатке за увежбавање), а путем неколико решених примера и са конкретном применом дате теорије. Уз текст и примере примене могу се дати задаци за увежбавање, проблеми са математичких такмичења, конкурсни задаци и литература, тако да индивидуални рад ученика има висок степен самосталности.

Текст који се даје ученицима може бити оригиналан ауторски текст наставника, као што је аутентични радни материјал "Решавање Диофантових једначина коришћењем дељивости" дат је у прилогу 18. Међутим, текст може бити узет са Интернета, из неког приручника,[316] математичког часописа,[317] или сличне литературе.[318]

9.3.4. ММ 15. - РАЗНИ ОБЛИЦИ УЧЕЊА ПУТЕМ "ОТКРИЋА"

Вероватно најпродуктивнији облик учења је учење путем "открића". Основу за учење путем "открића" чини такозвани генетички принцип који је формулисао немачки биолог Ернест Хекел.[319] Суштина тог принципа је да онтогенија[320] понавља филогенију.[321] Преведено на језик наставе математике, развој математичког мишљења код сваког појединца у суштини није ништа друго до пролазак ученика кроз еволуцију оних математичких идеја и открића која су пратила савремену цивилизацију кроз историју. Отуда нешто што је већ одавно тековина светске науке, дакле сазнавање новог, може бити веома плодотворно као "откриће", ако је до њега ученик дошао сопственим мисаоним напором.

[316] Видети текст: [9.172.] др Владимир Мићић: Диофантове једначине – Приручник за додатну наставу математике, Завод за уџбенике, Београд,1979.

[317] Видети чланак: Војислав Андрић: Решавање неких Диофантових једначина 2. степена – Математички лист за ученике основних школа број 6/XVIII, Београд, 1984.

[318] Видети текст: [8.141.] др Зоран Каделбург: Диофантове једначине Увод у теорију бројева – Друштво математичара Србије, свеска 15, Београд, 2004.

[319] Ернест Хекел - Ernst Haeckel (1834-1919).

[320] Онтогенија – развитак јединке – Вујаклија – стр. 632 .

[321] Филогенија – развитак врсте – Вујаклија – стр. 966.

Зато од даровитих младих математичара не треба очекивати епохална открића, али их треба подржавати у сваком самосталном долажењу до важних научних чињеница, ма колико оне биле познате. Треба имати на уму да се у току, до сада одржаних 46 Интернационалних математичких олимпијада (ИМО), никада није догодило да један задатак остане нерешен, па је чувени руски математичар А.Н. Колмогоров поучен искуством да ученици често реше проблеме који задају велике тешкоће и њиховим наставницима, једанпут, у шали, рекао да је једини начин да се открије решење велике Фермаове теореме тај, да се постави као један од проблема на ИМО.

Ђерђ Поја у својим истраживањима математичког открића говори о законима математичког открића са великим упитником[322], што значи да је и сам свестан чињенице да је формализација открића могућа, али и да поштовање дефинисане форме открића није сигуран пут до открића. Зато он помиње принципе: рационалности, економичности, флексибилности, хипотетичности, сложености, повезаности, корисних свођења, помоћних задатака ...

И исказује мисао да талентован ученика ради у складу са овим принципима, али уопште није свестан да их користи. Научник делује такође у сагласности са правилима, али о њима уопште не размишља. Почетник истраживач не само да се придржава правила, него и процењује ефекте њихове примене.

Као пример учења путем открића наводимо један (већ помињан) проблем у коме није тешко решити Диофантоваку једначину, али доста сложеније пребројати колико она има решења:

<u>ЗАДАТАК 89</u>. Колико решења у скупу целих бројева има једначина $x^2 – y^2 = n$, ако је n природан број.

Како је у теоријским основама овај проблем решен овде ће се изложити само специфичности методичког модела, тј. поступак усмеравања ученика ка открићу. Тај поступак би у интерактивном раду био реализован кроз низ усмеравајућих питања, а у идвидуалном раду се даје кроз следећа упутства која чине мали истраживачки план:

1) Анализирајмо начин решавања и број решења једначине $x^2 – y^2 = n$, ако n узима вредности: 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40. Могу ли се извести какви закључци који важе за било које бројеве сличних особина?

2) Може ли се на основу претходних примера направити аналогија између броја решења дате једначине $x^2 – y^2 = (x + y)(x – y) = n$ и броја решења једначине $xy = n$?

3) Шта су сличности, тј. праве аналогије, а шта разлике у два посматрана случаја?

4) Колико решења има једначина $x^2 – y^2 = 1$ у скупу природних бројева?

[322] Видети: [9.175.] Джордж Пойа: Математическое открытие – "Наука", Москва, 1976. – стр. 275.

5) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = 2$ у скупу природних бројева?

6) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = 2^\alpha$ $(\alpha \in N_o)$? Да ли је при том важна (не)парност броја α? Може ли се број решења једначине изразити јединственом формулом у зависности од α?

7) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = p$, ако је p било који прост број?

8) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = p^\beta$, ако је p било који непаран прост број и $\beta \in N_o$? Да ли је при том важна (не) парност броја β? Може ли се број решења једначине исказати једном формулом у зависности од броја β?

9) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = 2^\alpha \cdot p^\beta$ $(\alpha, \beta \in N_o)$? Могу ли се идеје и закључци из претходних случајева (5 и 7) искористити?

10) Колико решења има једначина $x^2 - y^2 = 2^\alpha \cdot к$, ге је $\alpha \in N_o$ и к било који непаран природан број? Да ли потребно и број к написати у канонском облику? Може ли се извести јединствена формула за сваки природан број n дат у канонском облику?

11) Испитати какав је однос броја решења једначине $x^2 - y^2 = n$, ако су x и y природни и ако су x и y цели бројеви? Δ

Наведени план може бити и краћи, али и дужи, зависно од тога колика је брзина уочавања за број решења једначине важних чињеница и брзина извођења закључака, укључујући и крајњу формулу која за било који природан број n. Изложени план очигледно илуструје скоро сва поменуте компоненте научног открића: рационалност, економичност, флексибилност, хипотетичност, сложеност, повезаност, корисна свођења, помоћне задатке.

Активно учење подразумева да се понекад ученик може навести да и сам открије нешто, за свој узраст, ново и интересантно. То наравно не мора бити ништа епохално и у математичкој науци непознато, али може бити и те како корисно, јер се претраживањем, варирањем параметара и сличним поступцима много тога и научи.

Мотивација за овакву врсту рада може бити различита, а приступ двојак.

Први начин је да се свим ученицима зада исти проблем и иста идеја и да онда свако од њих крене својим путем, све док може да нешто учини. При том је отворена могућност за сарадњу, размену и укрштање резултата и идеја.

Други приступ је да сви добију различите проблеме и идеје и да самостално крену напред, повремено консултујући наставника и даровите са којима раде на истом послу, јер се путеви откивања непознатог понекад укрсте из разлога што су проблеми слични и "конвергирају" ка заједничком, општијем проблему.

Оба приступа се могу комбиновати, али је веома важно да ученици оно што су самостално "открили" презентирају и одбране пред својим колегама. Тиме посао који раде добија на значају, а одговорност за квалитет рада се повећава. Оваквим поступком додатно ће се развити математичка интуиција и осетљивост за проблеме.

Један од таквих, могућих поступака даје се кроз следећи пример:

<u>*ЗАДАТАК 90*</u>*. Бројеви x, y, z и к су природни. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 2^к$, има решење увек када је к непаран број. Шта се може закључити за једначину $x^2 + y^2 = z^k$?*

РЕШЕЊЕ: Како је $2^к$ паран број, онда су бројеви x^2 и y^2 исте парности, па постоје две могућности:

1) Бројеви x и y су непарни, тј. $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$. Тада је $x^2 + y^2 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 2^к$. Следи да је $4a(a + 1) + 4b(b + 1) = 2^к – 2 = 2(2^{к-1} – 1)$ или $2a(a + 1) + 2b(b + 1) = 2^{к-1} – 1$. Како је лева страна једнакости паран број, а десна непаран број, у овом случају једначина нема целобројних решења.

2) Бројеви x и y су парни, тј. $x = 2^m (2a+1)$ и $y = 2^n(2b + 1)$, где су a и b неки природни бројеви, a m и n су природни бројеви мањи од к. Тада је $x^2 + y^2 = (2^m (2a+1))^2 + (2^n(2b + 1))^2 = 2^{2m}(4a^2 + 4a + 1) + 2^{2n}(4b^2 + 4b + 1) = 2^{2n}(2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1) + 4b^2 + 4b + 1) = 2^к$ или $2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1) + 4b^2 + 4b + 1 = 2^{к - 2n}$.

2.1.) Ако је $2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1) + 4b^2 + 4b + 1$ непаран број, то мора бити и број $2^{к - 2n}$, што значи да је $к – 2n = 0$, па је $2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1) + 4b^2 + 4b + 1 = 1$, или $2^{2m - 2n}(4a^2+ 4a + 1) + 4b^2+ 4b = 0$, што је немогуће, јер је $2^{2m - 2n}(4a^2+ 4a+ 1) + 4b^2+ 4b \geq 1$.

2.2.) Ако је $2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1) + 4b^2 + 4b + 1$ паран број, онда је то могуће само ако је и $2^{2m - 2n}(4a^2 + 4a + 1)$ непаран број. Тада је $2m - 2n = 0$, тј. $m = n$. Следи да је $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 2^{к - 2n}$. Једнакост је могућа само ако је $2^{к - 2n} = 2$, јер ће у свим другим случајевима лева страна при дељењу са 4 давати остатак 2, а десна 0. Дакле, $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 2$, па је $a = b = 0$. Према томе једино решење је $x = y = 2^n$ и $к - 2n= 1$, па је $к = 2n + 1$. ∆

На основу претходног јасно је да једначина $x^2 + y^2 = z^{2к+1}$ има увек решење $x = y = 2^к$. и $z = 2$. Међутим, намећу се питања: Да ли једначина $x^2 + y^2 = z^{2к+1}$ има само добијено решење? Да ли је број решења једначине $x^2 + y^2 = z^{2к+1}$ коначан или бесконачан? Шта се дешава када је у питању једначина $x^2 + y^2 = z^{2к}$?

Ако је $x^2 + y^2 = z^3$, онда је једно њено решење $x = 11$, $y = 2$, $z = 5$, јер је $11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125 = 5^3$. Евидентно је да тада формуле $x = 11к^3$, $y = 2к^3$ и $z = 5к^2$, генеришу једно од могућих решења, јер је $(11к^3)^2 + (2к^3)^2 = 121к^6 + 4к^6 = 125к^6 = (5к^2)^3$. То значи и да дата једначина има и других решења, али и да их има бесконачно много, јер се за свако к добија једно решење.

Било би интересантно потражити одговор и на питање да ли су то сва решења једначине $x^2 + y^2 = z^3$ и ако нису да ли се сва решења могу описати неком формулом?

Ако се посматра једначина $x^2 + y^2 = z^4$, онда се може направити слична конструкција: $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 5^4$, тј. $(15к^2)^2 + (20к^2)^2 = (5к)^4$. Дакле, формула $x = 15к^2$, $y = 20к^2$ и $z = 5к$, генерише читав један бесконачни скуп могућих решења.

Поставља се питање, да ли се може добити и општији резултат, јер из једначини $x^2 + y^2 = z^4$ следи да је (x, y, z^2) Питагорина тројка. Дакле, постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$, при чему је $(m,n) = 1$, $m > n$ и m и n су различите парности. Сада је опет јасно да бројеви m, n и z чине нову Питагорину тројку, па постоје природни бројеви p и q такви да је $m = 2pq$, $n = p^2 – q^2$ и $z = p^2 + q^2$ ($p > q$; p и q су узајамно прости; p и q су различите парности). Тада је $x = 2mn = 4pq(p^2 – q^2)$, $y = (2pq)^2 – (p^2 - q^2)^2$ и $z = p^2 + q^2$.

Даље се може посматрати једначина $x^2 + y^2 = z^5$. Из већ уоченог решења $x = y = 2^2 = 4$, $z = 2$, може се конструисати и општије решење $x = y = 4к^5$, $z = 2к^2$ ($к \in Z$). Међутим, број $5^5 = 3125$ се може написати као $625 + 2500 = 25^2 + 50^2$, па је $x = 25к^5$, $y = 50к^5$, $z = 5к^2$ још једна формула која генерише бесконачно много решења дате једначине.

Ако се посматра једначина $x^2 + y^2 = z^6$, онда је јасно да је $x^2 + y^2 = (z^3)^2$ па је (x, y, z^3) Питагорина тројка, тј. постоје природни бројеви m и n такви да је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^3 = m^2 + n^2$. Једначина $z^3 = m^2 + n^2$ је већ разматрана. Једно њено решење је $m = 11к^3$, $n = 2к^3$, $z = 5к^2$. Због тога је $x = 2·11к^3·2к^3 = 44к^6$, $y = (11к^3)^2 – (2к^3)^2 = 117к^6$ и $z = 5к^2$.

Јасно је да се на сличан начин поступак може наставити и даље.

Ако је $x^2 + y^2 = z^{2к+1}$, онда је формулама $x = y = 2^к a^{2к+1}$, $z = 2a^2$ дефинисано бесконачно много решења дате једначине.

Ако је $x^2 + y^2 = z^{2к} = (z^к)^2$. Тада је $(x, y, z^к)$ Питагорина тројка, па је $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^к = m^2 + n^2$. Како је $к < 2к < 2к + 1$, то је једначина $z^к = m^2 + n^2$ већ разматрана (зависно од тога да ли је к парно или непарно) тако да се једно од бесконачно много могућих решења добија без већих проблема.

Када је реч о Диофантоваким једначинама учење путем "откривања" се може реализовати и код свих садржаја везаних за коришћење последње цифре у решавању Диофантових једначина, јер се откривањем законитости код последње цифре бројева n^k, a^n, производа неколико узастопних природних бројева и n!, може доћи до вредних и веома употребљивих резултата. "Откривањем" се могу конструисати и разне класе Херонових троуглова, Питагорине четворке, петорке ... али и друге интересантне чињенице које се не могу предвидети.

Код учења путем "откривања" и ученик и наставник крећу у неизвесност, јер никада није сигурно да ће ученик открити оно што је планирано да открије. Али није проблем и ако се не открије оно што је замишљено, јер сам ход од почетне идеје ка открићу је веома добро учење. Осим тога, врло вероватно је да ће се у процесу од идеја и хипотеза ка открићу, ако не жељено, открити нешто друго исто тако важно и интересантно. Уосталом много је примера у светској науци и историји математике да су научници трагали за решењем једне законитости, а открили сасвим другу законитост. Зато је учење "откривањем" велики изазов и за ученика и за наставника и треба га користити кад год се за то укаже прилика, а проблема погодних за истраживање, бар у области Диофантових једначина има сасвим довољно и довољно су занимљиви да имају и снажну мотивациону улогу.

ММ 16. - УЧЕЊЕ ИСТРАЖИВАЊЕМ

Поступак активног учења, веома сличан претходном, одвија се и уколико се ученици ставе у ситуацију да нешто самостално истражују у материји која је већ савладана. Наравно, и у овој ситуацији не треба очекивати епохалне резултате, али то није ни циљ таквог рада, јер суштински циљ треба да буде даље развијање креативних способности ученика и увођење у методологију научно-истраживачког рада.

Улога наставника и при оваквим подухватима је веома значајна, јер морају имати осећај за проблем и усмерити ученика на правац којим се треба кретати како би истраживање било плодоносно. При том много зависи и од самог ученика, његове инвенције и способности да уочи вредне резултате и идеје које до њих воде. Конкретан пример једног таквог поступка је следећи проблем са планом истраживања.

<u>ЗАДАТАК 91</u>. Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 2z^2$ има бесконачно много, а једначина $x^2 + y^2 = 3z^2$ нема целобројних решења. Шта се може закључити за Диофантову једначину $x^2 + y^2 = nz^2$ (n је природан број)?

РЕШЕЊЕ: Овај пример садржи полазну основу и усмеравајућу одредницу, а план истраживања може бити следећи:

1) Доказ датих тврђења.

2) Коришћење већ истражених једначина облика $x^2 + y^2 = n$ (дакле $z = 1$) за истраживање једначина $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x^2 + y^2 = 5z^2$, $x^2 + y^2 = 6z^2$ ...

3) Коришћење чињенице да једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имају једнак број решења за даља померања од конкретних примера ка бесконачним класама једначина датог типа.

4) Формулисање хипотезе на основу довољног броја истражених случајева, а хипотеза гласи: Диофантова једначина $x^2 + y^2 = nz^2$ за бесконачно много вредности n има решење и за бесконачно много вредности нема решење.

5) Доказ формулисане хипотезе. Δ

Диофантове једначине су веома плодно тле за увођење даровитих у истраживачки рад, јер истраживања нису компликована и примерена су узрасту и предзнањима средњошколаца. Тема за истраживање је на претек јер свака Диофантова једначина може имати своје мало уопштење, ма у ком се правцу кретали.[323]

ММ 17. - УЧЕЊЕ УОПШТАВАЊЕМ ПРОБЛЕМА

Својеврстан облик активног учења је и самосталан рад на уопштавању појединих проблема. Уопштавање проблема тражи добро познавање материје у којој се покушавају генерализације. Код оваквих поступака код ученика се максимално развија интуиција и способност уочавања законитости. Улога наставника при овоме је да укаже на могуће правце у генерализацији и да повремено контролише исправност резултата. Све остало је плод експерименталне оспособљености, ученикове маште, креативности, способности наслућивања, способности да се формулише, а потом докаже одређена хипотезе, ... Примери који следе показују неке могућности у овој сфери рада:

<u>ЗАДАТАК 92</u>. Нека су x, y, z и к природни бројеви. Одредити решења једначине $x^2 + кy^2 = z^2$?

РЕШЕЊЕ: Ако је к = 1, онда се дати проблем своди на Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$, која има опште решење: $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$, при чему је $(m,n) = 1$, $m > n$, где су m и n природни бројеви различите парности.

Уколико је к = 2, онда је је $x^2 + 2y^2 = z^2$, па је $2y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z – x)$. Ако је $z + x = 2y$, а $z – x = y$, онда је $x = \dfrac{y}{2}$ и $z = \dfrac{3y}{2}$. Према томе, ако је $y = 2n$, где је n природан број, онда је (n, 2n, 3n) једно од могућих решења дате једначине. Јасно је да таквих решења има бесконачно много, али и да то није једино решење, јер се другачијом факторизацијом броја $2y^2$ могу добити и друга решења.

Ако је $x^2 + 3y^2 = z^2$, онда је $3y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z – x)$. Ако је $z + x = 3y$, а $z – x = y$, следи да $x = y$ и $z = 2y$. Уколико је n природан број, онда је уређена тројка (n, n, 2n) једно од могућих решења дате једначине. Опет је јасно да таквих решења има бесконачно много, али и да то нису и једина решења.

Уколико је к = 8, онда је $x^2 + 8y^2 = z^2$. Како је $8y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z – x)$, то је $z + x = 8y$, а $z – x = y$, па је $x = \dfrac{7y}{2}$ и $z = \dfrac{9y}{2}$. Према томе, ако је $y = 2n$, где је n природан, онда је (7n, 2n, 9n) једно од могућих решења дате једначине. Могућа је и комбинација $z + x = 4y$, а $z – x = 2y$, из које следи да је $x = y$ и $z = 3y$. Дакле још једно у скупу од бесконачно много решења је (n, n, 3n).

[323] У прилогу 28. дајемо скицу једног таквог "малог" истраживања, а у оквиру Диофантових једначина су могуће и многе друге теме и једначине.

Ако се посматра једначина $x^2 + ky^2 = z^2$, онда је $ky^2 = z^2 - x^2$. Дакле, $ky^2 = (z + x)(z - x)$ што значи да је $z + x = ky$, а $z - x = y$. Тада је $x = \frac{(k-1)y}{2}$ и $z = \frac{(k+1)y}{2}$. Према томе, ако је $y = 2n$ ($n \in N$), онда је ((к-1)n, 2n, (к+1)n) једно од могућих решења дате једначине.

Јасно је да таквих решења има бесконачно много, али и да добијена класа решења није једино решење, јер се другачијом факторизацијом броја ky^2 могу добити и друге класе решења.

Једна од таквих факторизација може бити и следећа: $z + x = y^2$, а $z - x = к$. Тада је $x = \frac{y^2 - k}{2}$ и $z = \frac{y^2 + k}{2}$. Према томе, ако је $y = n$, где је n природан број, онда је $(\frac{n^2 - k}{2}, n, \frac{n^2 + k}{2})$ још једно од могућих решења дате једначине.

Међутим, од уочених уопштења квалитетније решење ће дати Диофантов метод почетног решења. На пример за $к = 11$, једначина $x^2 + 11y^2 = z^2$ има једно решење (1, 3, 10) и уобичајеним поступком се може добити двопараметарско решење дате једначине.

Дакле, на основу уопштавањем добијеног решења увек се може одредити "почетно" решење, а потом Диофантовим методом читава класа решење.

Још "боље" решење се може добити ако се анализа једнакости $ky^2 = (z + x)(z - x)$ изврши аналогно случају к = 1 (Питагорини бројеви). Δ[324]

<u>ЗАДАТАК 93</u>. Бројеви x, y, z и к су природни. Може ли се одредити опште решење једначине $x^2 + y^к = z^2$?

РЕШЕЊЕ: Ако је к = 1, онда је $z^2 - x^2 = y = (z + x)(z - x)$. Зависно од облика канонског развоја броја y, једначина нема или има једно, два, или више, али увек коначан број решења.[325]

Ако је к = 2, онда се проблем своди на Питагорину једначину $x^2 + y^2 = z^2$, која има опште решење: $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ и $z^2 = m^2 + n^2$, при чему је $(m,n) = 1$, $m > n$, где су m и n природни бројеви различите парности.[326]

---

[324] Видети поглавље 7. Методичка трансформација – Питагорини бројеви.

[325] У поглављу 7. видети тематску јединицу: Једначина $x^2 - y^2 = n$.

[326] Погледати тематску јединицу Питагорини бројеви, која је дата у поглављу 7.

Уколико је к = 3, онда је је $x^2 + y^3 = z^2$, па је $y^3 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$. Ако је $z + x = y^2$, а $z - x = y$, онда је $x = \frac{y^2 - y}{2}$ и $z = \frac{y^2 + y}{2}$. Према томе, ако је n природан број и $n \geq 2$, онда је уређена тројка $(\frac{n^2 - n}{2}, n, \frac{n^2 + n}{2})$ једно од могућих решења дате једначине. Јасно је да таквих решења има бесконачно много, али и да то није једино решење, јер се другачијом факторизацијом броја y^3 могу добити и друга решења.

Ако је к > 3, онда је $x^2 + y^k = z^2$. Тада је $y^k = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$. Ако је $z + x = y^{k-m}$ и $z - x = y^m$, где је к - m > m, тј. k > 2m. Тада је $x = \frac{y^{k-m} - y^m}{2}$ и $z = \frac{y^{k-m} + y^m}{2}$, што значи да се у зависности од m може формирати више класа решења.

Уколико је n природан број и $n \geq 2$, онда су решења дате једначине дата уређеним тројкама $(\frac{n^{k-m} - n^m}{2}, n, \frac{n^{k-m} + n^m}{2})$. Јасно је да таквих решења има бесконачно много, али и да то нису једина решења.

Као и у претходном случају "боље" решење се може добити ако се анализа једнакости $y^к = (z + x)(z - x)$ изврши аналогно случају к = 1 (Питагорини бројеви).[327] Узимајући у обзир да су x, y и z у паровима узајамно прости, да су бројеви z + x и z –x исте парности, добиће се да су z + x и z – x такође узајамно прости што значи да број $y^к$ мора бити облика $m^к n^к$ где су m и n неки природни бројеви. Следи да је $z + x = m^к$ и $z - x = n^к$, па се добија опште решење дате Диофантове једначине $x = \frac{m^k - n^k}{2}$, $y = mn$ и $z = \frac{m^k + n^k}{2}$, где су m и n природни бројеви који морају испуњавати три услова: 1) m и n су исте парности (због целобројности x и z); 2) m и n су узајамно прости; 3) m > n (да би x био природан број). Δ[328]

*

Даља уопштавања се могу наставити у правцу решавања Диофантових једначина $x^2 + y^2 = кz^2$, $x^2 + y^2 = z^k$, $x^2 + ay^2 = bz^2$. Резултати које ученици добију овим поступком можда нису увек потпуне генерализације, али представљају сигуран корак ка самосталном и креативном раду и увођењу младих људи у методологију научног рада.

[327] Видети поглавље 7. Методичка трансформација – Питагорини бројеви.
[328] Било би интересантно упоредити ову општу формулу са формулом за Питагорине тројке, а и искористити рачунар за генерисање бар десетак првих решења за к = 3, к = 4, к = 5...

ММ 18. - ФОРМУЛИСАЊЕ НОВИХ ПРОБЛЕМА

Решавање Диофантових проблема, откривање, истраживање, уопштававање могу бити добра основа за још неке облике активног односа ученика према материји која је предмет креативног обликовања. Један од тих облика свакако је и формулисање нових и оригиналних проблема. Ево неколико примера и за такав методички модел који је сигурно добар и активан облик учења, јер садржи скоро све облике учења које смо помињали.

Посматрајмо једноставни уопштени диофантски проблем: Одредити све троцифрене бројеве који су к пута већи од збира својих цифара. Могу се формулисати следећи конкретни проблеми:

ЗАДАТАК 94. Ако је троцифрен број к пута већи од збира својих цифара (к $\in$ N), која је најмања, а која највећа вредност природног броја к?

ЗАДАТАК 95. Колико има троцифрених бројева који су 19 пута већи од збира својих цифара?

ЗАДАТАК 96. Нека је количник троцифреног природног броја и збира његових цифара једнак природном броју к. За које к има највише таквих троцифрених бројева?

ЗАДАТАК 97. Доказати да не постоји троцифрен природни број који је 65 пута већи од збира својих цифара.

ЗАДАТАК 98. Ако је троцифрен природни број к (к $\in$ N) пута већи од збира својих цифара, онда проблем има решење за к = 11, 12, 13, 14, ... Ако је к $\geq$ 11, колика је најмања вредност к за коју не постоји такав троцифрен природни број?

Ако се посматра или истражује збир квадрата узастопних природних бројева могу се формулисати следећи проблеми:

ЗАДАТАК 99. Познато је да је $3^2 + 4^2 = 5^2$. Постоји ли и колико Питагориних тројки чији елементи су узастопни природни бројеви?

ЗАДАТАК 100. Зна се да је $3^2 + 4^2 = 5^2$, $20^2 + 21^2 = 29^2$. Да ли је број Питагориних тројки у којима су x и y суседни природни бројеви коначан или бесконачан?

ЗАДАТАК 101. Доказати да не постоје три узастопна природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.

ЗАДАТАК 102. Доказати да не постоје четири узастопна природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.

ЗАДАТАК 103. Доказати да не постоји пет узастопних природна броја чији је збир квадрата потпун квадрат.

<u>ЗАДАТАК 104</u>. *Истраживањем збира неколико узастопних природних бројева добија се* $1^2 = 1^2$, $1^2 + 2^2 + ... + 24^2 = 70^2$. *Да ли постоји и колико природних бројева к таквих да је* $1^2 + 2^2 + ... + к^2$ *потпун квадрат?* ◊

Формулисање нових проблема може бити последица и неких истраживања. Такав је на пример проблем

<u>ЗАДАТАК 105</u>. *Доказати да једначина* $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_к^3 = y^2$ *има решења у скупу природних бројева за сваки природан број к.*

До нових проблема се може доћи и презентацијом резултата појединих уопштавања. Такви су следећи примери:

<u>ЗАДАТАК 106</u>. *Да ли једначина* $x^2 + y^2 = z^6$ *има коначно или бесконачно много решења, ако су x, y и z природни бројеви?* ◊

Формулисање нових проблема може бити резултат и једноставних нумеричких истина, при чему се увек може поставити и питање да ли је дата једнакост и једина. На пример из чињенице да је $27^2 = (3^3)^2 = 9^3 = (2 + 7)^3$ може се формулисати проблем

<u>ЗАДАТАК 107</u>. *Одредити све двоцифрене природне бројеве чији је квадрат једнак кубу збира његових цифара.*

Слично из $2^2 + 2 \cdot 4^2 = 4 \cdot 3^2$ следује, $(2к)^2 + 2 \cdot (4к)^2 = 4 \cdot (3к)^2$ и добија се следећи проблем.

<u>ЗАДАТАК 108</u>. *Ако су x, y и z природни бројеви, доказати да онда Диофантова једначина* $x^2 + 2y^2 = 4z^2$ *има бесконачно много решења.* ◊

Нови проблеми се могу формулисати и једноставном анализом особина неких математичких објеката. На пример правоугаоник чије су странице 5 и 20 има површину чији је мерни број два пута већи од мерног броја његовог обима. Поставља се опет питање да ли је он и једини правоугаоник са том особином?

<u>ЗАДАТАК 109</u>. *Одредити све правоугаонике чији су мерни бројеви страница природни бројеви, ако је мерни број површине правоугаоника два пута већи од обима правоугаоника.*

Или, ако су a и b странице, a d дијагонала једнакокраког тангентног трапеза онда следи да је $d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$. Поставља се следећи проблем који се своди на Диофантоваку једначину:

<u>ЗАДАТАК 110</u>. *Дат је једнакокраки тангентни трапез чије су основице a и b. Одредити мерне бројеве a и b тако да мерни број дијагонале трапеза буде цео број. Да ли таквих природних бројева има коначно или бесконачно много?*

Учење формулисањем проблема је веома добар методички модел, јер да би ученик дошао до оригиналног Диофантоваког проблема мора да употреби не само знање и стечено искуство, него и да решава, истражује, уопштава, комбинује, анализира, синтетизује ... Једном речју мора према послу који је пред њим имати активан и креативан однос. Уосталом, многи методичари тврде да је једна материја у потпуности савладана тек онда када је даровити ученик спреман да сам формулише неке оригиналне проблеме из дате области.

9.3.5. ММ 19. - УЧЕЊЕ УЗ ПОМОЋ РАЧУНАРА

О коришћењу рачунара у раду са даровитима у области Диофантових једначина већ је било речи. Општем погледу на ту материју, учењу практичних радњи везаних за коришћење Интернета и могућностима интерактивног учења (неколико варијанти), додајемо конкретан методички садржај – конкретне проблеме намењене за самосталан рад даровитих ученика на Диофантоваким једначинама уз помоћ рачунара. Проблеми који су дати траже вештину програмирања, али и конкретна знања везана за Диофантоваке једначине која омогућују рационалније програмирање и истраживање коришћењем рачунара:

<u>ЗАДАТАК 111</u>. *Направити програм за решавање линеарне Диофантоваке једначине $ax+by+cz=d$, који ће за дате целе бројеве a, b, c, d као излазни податак давати коментар да ли једначина има или нема решење и ако има штампати опште решење дате једначине.*

<u>ЗАДАТАК 112</u>. *Направити програм за решавање Диофантоваке једначине $x^2+y^2=к$ који ће за дати природан број к, као излазни податак давати коментар да ли једнчина има или нема решење и ако има штампати сва решења дате једначине.*

<u>ЗАДАТАК 113</u>. *Одредити основна решења једначина $x^2-py^2=1$ за све вредности природног броја p који нису потпуни квадрати из интервала (2, 1000).*

<u>ЗАДАТАК 114</u>. *Дата је једначина $1000a+100b+10c+d=к(a+b+c+d)$, где су a, b, c, d цифре неког четвороцифреног броја, а к природан број. Направити програм који ће израчунати:*

a) најмању и највећу вредност природног броја к;

b) све вредности природног броја к између највеће и најмање за које једначина нема решења;

c) све вредности броја к за које једначина има највећи број решења;

d) све вредности броја к за које једначина има тачно једно решење;

e) све четвроцифрене природне бројеве који су 400 пута већи од збира својих цифара.

ЗАДАТАК 115. Познато је да је $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$ и $23^3 + 24^3 + 25^3 = 204^2$. Направити програм који ће испитати да ли у рачунарском домену има још тројки узастопних природних бројева чији је збир кубова потпун квадрат. Слично рачунарско истраживање направити са четворкама и петоркама узастопних природних бројева, али и са потпуним кубовима, ...

9.3.6. ММ 20. - ЗАНИМЉИВЕ ПРИМЕНЕ

Веома леп пример активног учења може бити и рад на проучавању занимљивих примена Диофантових једначина. Примене обогаћују математичке садржаје и њихово усвајање чине трајнијим, а мотивацију ученика подижу на виши ниво. Примене су уосталом и најбољи начин да се докаже степен овладаности појединим проблемима, али и искажу способности да се стечено знање корисно употреби. Зато примене треба неговати, па и форсирати, јер оне додатно подржавају сврху постојања математике и сву њену раскошну лепоту, присутну у сваком делу наше стварности.

Један од најлепших примера примене Диофантових једначина свакако је проблем паркетирања, тј. поплочавања равни правилним полигонима исте или различите врсте. О том проблему је размишљао још почетком 17. века чувени Јохан Кеплер. У свом познатом делу "Хармонија света" он даје фантастична решења до којих долази математичким апаратом, а која су естетски веома прихватљива и добијају своју практичну примену у архитектури тога доба.[329]

ЗАДАТАК 116. Одредити којим се правилним полигонима исте врсте може поплочати раван.

РЕШЕЊЕ: Нека тражени правилни полигон има m страница и нека се n таквих полигона сустичу у једном темену. Како је један угао правилног многоугла једнак $\frac{(m-2)180^o}{m}$ то је $n \cdot \frac{(m-2)180^o}{m} = 360^o$. Добија се Диофантова једначина $n(m-2) = 2m$ или $nm - 2n - 2m = 0$. Одавде је $nm - 2n - 2m + 4 = 4$ или $(n - 2)(m - 2) = 4$, па су могући следећи случајеви:

1) $n - 2 = 1$ и $m - 2 = 4$, па је $n = 3$ и $m = 6$;
2) $n - 2 = 2$ и $m - 2 = 2$, па је $n = 4$ и $m = 4$;
3) $n - 2 = 4$ и $m - 2 = 1$, па је $n = 6$ и $m = 3$;

Дакле, могуће је паркетирање равни са по 3 правилна шестоугла који су сусрећу у истом темену, са по 4 квадрата или са по 6 једнакостраничних троуглова. Δ

[329] Видети [9.171] Kladner A. David: The mathematical gardner (руско издање) – "Мир", Москва, 1983. – стр. 220-252.

На сличан начин се могу даље разматрати и случајеви када се раван не поплочава само многоугловима исте врсте, већ комбинацијом две или више врста правилних многоуглова.[330]

*

На крају овог важног поглавља неколико завршних напомена:

Сигурно је да двадесетак наведених методичких модела нису и једини који омогућују добру наставу, активно учење и квалитетан рад са обдаренима за математику. Они су само једна од могућих илустрација широког спектра различитих сценарија који се могу искористити за квалитетан рад са обдареном децом. На наставницима - реализаторима је да предложене моделе примене, али и да својом активношћу и креативношћу понуде и друге, исто тако ефикасне моделе наставног рада у области Диофантових једначина.

Исто тако несумњиво је и да већина наставних модела није у потпуности "чиста", јер наставе математике нема без решавања проблема, интеракције и откривања новог и непознатог. Зато је проблемској настави, интерактивној настави и учењу путем "открића" и покоњена највећа пажња и зато њих у суштини у већој или мањој мери има у скоро свим моделима. Међутим, то никако не значи да су остали наставни модели мање важни, већ напротив да због њихове занимљивости треба тежити да се и они што чешће примењују.

Приликом излагања методичких модела трудили смо се да захватимо што више наставних садржаја. Најчешће су наставни садржаји, како то дидактички принципи и налажу, наметали методички модел. По негде (код модела који се ретко користе у наставној пракси) су модели бирали садржаје, јер је било штета изоставити нешто што може бити добар узор за примену у наставној пракси. Ипак неки наставни садржаји су остали ван изложених модела. Верујемо да ће реализација рада са обдаренима у нашим средњим школама и за њих наћи решење, јер мислимо да је бирање сценарија за реализацију појединих наставних садржаја аутономно право реализатора наставе, чиме ће се сигурно добити и нови методички модели и успешнија настава.

---

[330] Текст о овој теми, веома примерен узрасту чак и ученика основне школе је [9.168] Бранка Ђерасимовић: Проблем паркетирања правилним полигонима - Приручник за додатну наставу математике, Завод за уџбенике, Београд, 1980. - стр. 46 - 54.