

*"Будућност није у готовим знањима,
већ у истраживањима; не у поседовању познатог
већ у величанственом уживању у стицању непознатог."*

Из Гаусовог писма Јаношу Бољају

10. ПЕДАГОШКИ ЕКСПЕРИМЕНТ

У претходном поглављу "Методички модели наставе Диофантових једначина", на примерима садржаја о Диофантовим једначинама дато је двадесет модела наставног рада са обдаренима у области математике. Сви ти модели су део вишегодишњег искуства наставника који су се успешно бавили радом са талентованим ученицима о области математике.

Неки од предложених модела су класичнији, неки модернији, али је свима заједничко да покушавају да у што већој мери мисаоно активирају ученике и искористе интелектуалну активност обдарених за стицање нових знања. Сигурно је да неки од предложених модела дају боље резултате од других, да су једни за ученике више занимљиви, а други мање занимљиви, да су први ефикаснији за учење, а други за оспособљавање за бављење математичком науком.

Једини начин да се утврди који модел, начин рада, облик рада... даје боље резултате је педагошки експеримент, који као опште прихваћен метод за утврђивање ефикасности појединих образовно-васпитних захвата користе многи наставници, педагози, психолози, методичари, дидактичари...

Циљ овог дела рада управо је да прикаже један од педагошких експеримената којим су истраживани ефекти рада са обдареним ученицима у области математике на конкретним садржајима о Диофантовим једначинама.

10.1. ИЗБОР И ФОРМУЛАЦИЈА ПРОБЛЕМА

У суштини, цео овај рад је својеврстан наставни експеримент, који подразумева истраживање свих аспеката рада са младим талентованим математичарима како педагошко-психолошких, тако и историјских, програмских, теоријских и дидактичко-методичких. Зато је само питање шта од мноштва проблема које садржи рад са обдаренима у области Диофантових једначина и егзактно проверити.

Диофантове једначине нису материја која има значајну заступљеност у наставним плановима и програмима редовне наставе математике у основној и средњој школи, не само у нашој земљи, него и у иностранству.³³¹ Међутим, Диофантове једначине имају веома значајно место у додатној настави математике и осталим облицима рада са талентованим ученицима (летње и зимске школе, математички часописи и литература, математичка такмичења, ИМО ...).

³³¹ Видети резултате компаративне анализе програма у поглављу 5, овога рада

Проблемима наставе Диофантових једначина у нашој земљи су се својим радовима бавили Снежана Илић, Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Ратко Тошић³³², као и сам аутор ове дисертације.³³³ У иностранству наставу Диофантових једначина на веома оригиналан начин је подстицала Јудита Цофман,³³⁴ чије методе рада са даровитима су веома интересантне, јер у себи садрже више истраживачког него наставног.

Све што је до сада речено, утицало је на опредељење да се поред педагошко-психолошке, дидактичко-математичке теоријске разраде и методичке трансформације материје о Диофантовим једначинама изврши и експериментално истраживање у циљу изналажења адекватне методике за рад са младим талентованим математичарима у области Диофантових једначина. Претпоставка је да ће наставни ефекти бити већи код оних наставника који садржаје о Диофантовим једначинама обрађују путем интерактивног рада него код оних који ту функцију обрађују класичном, предавачком, трансмисионом наставом.

Проблем нашег експерименталног истраживања јесте: **ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО САГЛЕДАВАЊЕ МОГУЋЕГ УТИЦАЈА ИНТЕРАКТИВНЕ НАСТАВЕ НА ПРОЦЕС УЧЕЊА И УСПЕХ У РЕАЛИЗАЦИЈИ НАСТАВНЕ ТЕМЕ "РЕШАВАЊЕ ДИОФАНТ-СКИХ ЈЕДНАЧИНА КОРИШЋЕЊЕМ НЕЈЕДНАКОСТИ."**

Експериментом се жели проверити оправданост нашег методичког модела интерактивног учења. Методички модел је детаљно приказан у претходном поглављу "Методички модели",³³⁵ а о предностима интерактивне наставе је већ било говора и у поглављима 3 и 8, где су посебно апострофиране предности коришћења рачунара за активну комуникацију ученик-наставник и ученик-ученик.

За експеримент је изабрана наставна тема "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости", јер је она:

- примерена интелектуалним способностима ученика;
- у пуној сагласности са предзнањима ученика првог разреда гимназије;
- довољно занимљива материја која утиче на позитивну мотивацију ученика;
- синтеза садржаја елементарне алгебре и елементарне теорије бројева.

Оно што ову наставну тему препоручује за реализацију интерактивном наставом су невелики теоријски захтеви, а велико богатство идеја које се могу применити приликом обраде наставних садржаја. То ову тему чини веома атрактивном и што је важније погодном за интерактивну наставу, јер се интеракцијом наставник – ученик и ученик – ученик те идеје размењују, анализирају, пробају, примењују и реализују при решавању појединих Диофантових једначина и проблема.

³³² Видети [10.181.], [10.183], [10.184] и [10.186]

³³³ Видети [10.176.], [10.177.], [10.178.], [10.179.]

³³⁴ Видети [10.186]

³³⁵ Видети поглавље 9.2.4. Интерактивно учење

10.2. ОПРАВДАНОСТ И ЗНАЧАЈ ИСТРАЖИВАЊА

Оправданост истраживања садржана је у чињеници да је добро имати релативно егзактан доказ ефикасности интерактивног учења, али и у томе што су педагошка истраживања наставне праксе у области математике доста ретка.

Значај експеримента није само у потврди веће ефикасности интерактивног учења у поређењу са класичним начином рада, већ и у чињеници да се експеримент врши у области која до сада апсолутно није третирана у настави математике у нашој земљи, а то је интерактивно учење (потпомогнуто коришћењем рачунара и Интернета) – облик учења које сигурно има велику перспективу.

Верујемо да ће ово истраживање поспешити коришћење интерактивног рада и рачунара (Интернета), не само у раду са даровитима у области Диофантових једначина, већ и у настави математике уопште. Ако се покаже да такав начин рада даје боље резултате од класичног начина извођења наставе, онда је практични значај експеримента несумњив.

Уколико овај експеримент подстакне слична истраживања и у другим областима наставе математике, онда је његово извођење сасвим оправдано.

10.3. ЦИЉЕВИ И ЗАДАЦИ ЕКСПЕРИМЕНТА

Општи циљ експеримента проистиче из одлуке о избору и дефиницији проблема и састоји се у настојању да се наставна тема "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" реализује класичном, предавачком наставном методом и интерактивним учењем (потпомогнутим коришћењем Интернета), а затим експерименталним путем утврде ефекти једног и другог начина рада и њихов утицај на повећање образовних ефеката.

Из општег циља проистичу конкретни задаци педагошког експеримента:

1. На основу теоријских сазнања везаних за Диофантове једначине конструисати дидактичко–методички модел за реализацију наставне теме "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" класичном, предавачком методом;

2. На основу теоријских сазнања везаних за Диофантове једначине и интерактивно учење конструисати дидактичко–методички модел за реализацију наставне теме "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" интерактивним учењем;

3. Реализовати оба методичка модела у наставној пракси и то са ученицима релативно једнаких предзнања и интелектуалних способности;

4. Уједначавање група (експерименталне и контролне) извршити идентичним иницијалним тестирањем математичких предзнања везаних за теорију бројева и тестирањем интелектуалних способности ученика;

5. Резултате реализације методичких модела измерити финалним тестом једнаким за све ученике;

6. На основу резултата финалног теста утврдити који методички модел даје боље резултате када су у питању образовни ефекти;

7. Утврдити који обим наставних садржаја је оптималан;

8. Утврдити који ниво образовних захтева је оптималан, тј. шта је примењено, а шта превазилази интелектуалне способности ученика.

10.4. ХИПОТЕЗА И ОЧЕКИВАНИ РЕЗУЛТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТА

У нашем истраживању нема нултих хипотеза, већ ћемо све хипотезе формулисати у алтернативном облику.

Наша основна хипотеза гласи:

ОБРАДА НАСТАВНИХ САДРЖАЈА У ОБЛАСТИ ДИОФАНТОВИХ ЈЕДНАЧИНА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ ПРИМЕНОМ ГОТОВОГ МЕТОДИЧКОГ МОДЕЛА ИНТЕРАКТИВНЕ НАСТАВЕ (КОЈИ ЈЕ РЕЗУЛТАТ ШИРОКИХ И СВЕОБУХВАТНИХ СТРУЧНИХ И ДИДАКТИЧКО МЕТОДИЧКИХ ИСТРАЖИВАЊА) ДАЋЕ ВЕЋИ ОБРАЗОВНИ УЧИНАК, НЕГО РЕАЛИЗАЦИЈА ИСТИХ САДРЖАЈА КЛАСИЧНИМ НАСТАВНИМ ПОСТУПКОМ.

У зависности од тога шта желимо експериментално утврдити могу се формулисати и следеће подхипотезе:

- Ученици који су знања из решавања Диофантових једначина коришћењем неједнакости стицали интерактивним путем ефикасније ће решавати задатке из те области од ученика који су слушали класичну наставу.
- Претпоставља се да ће ученици који су имали интерактивну наставу имати бољи учинак код решавања непознатих проблема (мисли се на задатке који нису били присутни у наставном раду ни код експерименталне ни код контролне групе).
- Наставни садржаји научени интерактивним путем успешније се примењују од оних који су научени "класично".
- Претпоставља се да ће ученици који су имали интерактивну наставу показати боље резултате у моделирању и решавању диофантских проблема.

10.5. МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

10.5.1. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ЕКСПЕРИМЕНТА

У нашој земљи, колико је нама познато, сем докторске тезе Миомира Анђића,³³⁶ није било других експерименталних истраживања из области методике наставе теорије бројева, а самим тим ни истраживања везаних за методiku наставе Диофантових једначина. Ово је утицало на опредељење да експериментално сагледамо наставне ефекте једног од најсавременијих наставних система – интерактивне наставе, на садржајима везаним за Диофантове једначине.³³⁷

Пре почетка самог експеримента теоријски је постављена дидактичко-методичка обрада теме "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" (класичним и интерактивним методом), а потом се приступило самом експерименту.

Експеримент је обављен у току септембра и октобра 2005. године. Експеримент је рађен у оквиру додатне наставе математике у Ваљевској гимназији (експериментална група) и Гимназији "Вук Караџић" у Лозници (контролна група). Експериментом су обухваћени ученици првог разреда гимназије. Експеримент се уклопио у реализацију наставне теме "Елементарна теорија бројева" која се са шест наставних часова реализује у додатној настави математике у првом разреду гимназије.³³⁸

Пре почетка наставног рада обе групе су испуниле анкетне упитнике, урадиле иницијални тест знања из теорије бројева и извршено је тестирање интелектуалних способности. Добијени иницијални резултати су показали да су разлике између експерименталне и контролне групе занемарујући, јер се у свим истраживаним елементима испод нивоа значајности, и да нема потребе за додатним уједначавањима група.

У оквиру контролне групе додатна настава је реализована у току четири наставна часа на основу унапред припремљеног дидактичко-методичког материјала.³³⁹ Настава је реализована класичним, предавачким, наставним методом, при чему се наставник посебно припремао и водио час по систему: уводни део, предавање, увежбавање, завршни део часа. Ученицима је препуштено да на основу урађених примера за домаћи задатак реше и преостале, нерешене задатке, али и да питају ако има проблема или потешкоћа са решавањем задатих проблема.

³³⁶ Видети [10.180] мр Миомир Анђић: Методичка трансформација и модели проблемске наставе теорије бројева у настави математике у гимназијама (докторска дисертација) – Нови Сад, 2004.

³³⁷ Аргументи за одабир наставне теме "Решавање Диофантових једначина методом неједнакости већ су наведени у поглављу 10.1. Избор и формулација проблема

³³⁸ Од предвиђених 6 часова додатне наставе за тему "Елементарна теорија бројев" нису сви часови намењени Диофантовим једначинама, јер постоји и други садржаји из елементарне теорије бројева

³³⁹ Видети: Прилог 17.

Са експерименталном групом су направљена два уводна часа која немају никаквих додирних тачака са Диофантовим једначинама. На првом уводном часу су ученици уведени у систем интерактивног рада. Дакле, начин комуникације коришћењем рачунара и електронске поште. Ученици су обучени за примену Microsoft Word пакета са посебним освртом на коришћење Equation Editora. Потом је реализован непосредни интерактивни рад,³⁴⁰ делимично директним контактима ученик-наставник и ученик-ученика, а једним делом и преко Интернета³⁴¹ при чему су сви учесници експеримента прошли обуку у Интернет-комуникацији. На другом је извршено упознавање ученика са алгоритмом "Како ћу решити математички задатак", приказана његова примена и рађено на правилном формалном изражавању и адекватном симболичком записивању решења.³⁴²

Интерактивна настава је реализована у току четири наставна часа по сценарију који приказан у претходном поглављу,³⁴³ при чему је избор проблема за илустрацију коришћења неједнакости у решавању Диофантових једначина био идентичан за експерименталну и контролну групу.

По завршетку наставног рада и у експерименталној и у контролној групи урађен је финални тест који је имао за циљ да измери образовне ефекте у контролној и експерименталној групи.

10.5.2. УЗОРАК

Експеримент је реализован у додатној настави математике у првом разреду гимназије природно-математичког смера, тако да није било могуће учинити масовнији избор ученика. Групе су и у Ваљевској гимназији и у Гимназији "Вука Караџић" у Лозници формиране од ученика који су се пријавили за реализацију додатне наставе математике и бројале су по 30 ученика. Претпоставка је била да је структура ученика у њима доста уједначена, јер деце заинтересоване и талентоване за математичке садржаје има у свим срединама. У прилог овоме иде и чињеница да и у Ваљевоу и у Лозници обдарени ученици у основној школи похађају организовану заједничку додатну наставу на нивоу града и да на математичким такмичењима имају приближно једнаке резултате.

Неколико следећих табела ће показати неке основне карактеристике изабраних група с обзиром на више релативних фактора и документовати чињеницу да се ради о уједначеним групама. Подаци дати у табелама обрађени су на основу анкетног упитника³⁴⁴ који је садржао неколико неопходних питања.

³⁴⁰ Видети сценарио првог уводног часа – потпоглавље 9.2.4 – страна 210-211.

³⁴¹ Коришћен је дискусионни форум spres-mat-vg@yahoo.com

³⁴² Видети сценарио првог уводног часа – потпоглавље 9.2.4 – страна 211-214.

³⁴³ Видети сценарио свих реализованих часова – потпоглавље 9.2.4 – страна 214-222.

³⁴⁴ Анкетни упитник 2 на основу кога је извршено истраживање основних карактеристика узорка је дат у Прилогу 19.

ПОЛНА СТРУКТУРА УЧЕНИКА				
ГРУПА	МУШКИ	%	ЖЕНСКИ	%
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА	19	62,50	11	37,50
КОНТРОЛНА	17	56,25	13	43,75
УКУПНО	36	60,00	24	40,00

Анализа полне структуре група указује да и експериментална и контролна група имају нешто више дечака него девојака, али да је тај однос у границама толеранције, дакле у односу 3:2. Видљиво је да у контролној групи однос нешто повољнији него у експерименталној.

УСПЕХ УЧЕНИКА У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ		
ГРУПА	ОПШТИ УСПЕХ УЧЕНИКА	УСПЕХ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА	4,943	4,906
КОНТРОЛНА	4,975	4,963
СРЕДЊА ВРЕДНОСТ	4,959	4,935

Успех ученика је посматран у периоду од 5. до 8. разреда основне школе и претходна табела садржи средњу оцену општег успеха и успеха из математике ученика на нивоу експерименталне и контролне групе.

Када је реч о успеху у основној школи, очигледно је да се ради о деци веома доброг, могуће је рећи изванредног општег успеха и успеха из математике, јер су одступања и код експерименталне и код контролне групе од максималних 5,00 заиста минимална (0,057, односно 0,025 код општег успеха и 0,094, односно 0,037 код математике). Нешто бољи општи успех и успех из математике има контролна група, али су разлике заиста занемарљиве.

УЧЕШЋЕ УЧЕНИКА У ПОСЕБНИМ ОБЛИЦИМА РАДА СА ОБДАРЕНИМА								
ГРУПА	ДОДАТНА НАСТАВА				ПРИПРЕМЕ УЧЕНИКА ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА			
	+	%	-	%	+	%	-	%
Е	87	72,50	33	27,50	91	75,83	29	24,17
К	92	76,67	28	23,33	86	71,67	34	28,33
УКУПНО	179	74,58	61	25,42	178	74,17	62	25,83

Посматрано је и учешће ученика у посебним облицима рада са обдаренима у основној школи. Близу 75% ученика је у вишим разредима основне школе похађало додатну наставу и припреме за математичка такмичења.

Нешто више, или тачно 4,17% ученика из контролне групе је похађало додатну наставу него у експерименталној групи, али је зато код припрема за математичка такмичења експериментална група имала за 4,24% већи интензитет активности. При свему овоме треба напоменути да су дати подаци просечни, што значи да је веома мали број ученика који нису били обухваћени неким од облика рада, али и да има ученика који су у 5. и 6. разреду били заинтересованији за математику, као и оних код којих се у 7. и 8. разреду пробудило интересовање.

УЧЕШЋЕ И УСПЕХ УЧЕНИКА НА МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА										
ГРУПА	ОПШТИН	%	ОКР-УЖН	%	РЕПУБЛ	%	САВЕЗНО	%	Σ	%
Е	24	19,79	40	33,33	14	11,67	6	5,00	84	69,79
К	24	20,31	49	40,63	13	10,94			86	71,88
УКУПНО	48	20,00	89	37,08	17	7,08	6	2,50	170	70,83

Кумулативни успех ученика на математичким такмичењима је можда једини показатељ у коме експериментална група незнатно одскаче од контролне. Наиме, док је до општинских и републичких такмичења долазио релативно једнак број ученика у обе групе, дотле контролна група има значајно више учесника окружних, а експериментална група савезних такмичења. Међутим, како се ради о прегледу учешћа у току четири школске године ове разлике се у принципу свде на највише два-три ученика.

ОБРАЗОВНА СТРУКТУРА РОДИТЕЉА							
ГРУПА		СРЕДЊА	%	ВИША	%	ВИСОКА	%
Е	ОТАЦ	13	44,82	2	6,90	14	48,28
	МАЈКА	14	45,82	3	8,33	13	43,75
	УКУПНО	27	45,76	5	8,48	27	45,76
К	ОТАЦ	15	50,00	2	6,25	13	43,75
	МАЈКА	15	50,00	4	12,50	11	37,50
	УКУПНО	30	50,00	6	10,00	24	40,00
УКУПНО	ОТАЦ	28	47,46	4	6,78	27	45,76
	МАЈКА	29	48,33	7	11,67	24	40,00
	УКУПНО	57	47,90	11	9,24	51	42,86

Када је у питању образовна структура родитеља, незнатну предност има експериментална група. Међутим, чињеница да 52,54% очева и 51,57% мајки има високо или више образовање говори о повољној образовној структури родитеља, јер је 42,86% родитеља са високом стручном спремом.

ОБРАЗОВНИ СТАНДАРД ПОРОДИЦЕ				
ГРУПА	ИМА КОМПЈУТЕР	%	КОРИСТИ Е-МАИЛ	%
ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА	27	90,00	21	70,00
КОНТРОЛНА	28	93,75	15	50,00
УКУПНО	55	91,67	36	60,00

Образовни стандард породица учесника експеримента мерили смо преко поседовања компјутера, односно коришћења електронске поште у породици. Истраживање је показало да је код поседовања компјутера незнатно повољнија ситуација у контролној него у експерименталној, а код коришћења електронске поште нешто виши стандард у експерименталној него у контролној групи. Али чињеница да 91,67% породица поседује компјутер, а 60% користи електронску пошту, говори о прилично повољној образовној структури породица ученика који су учествовали у експерименту.

Изложена анализа спроведене анкете говори о високом степену уједначености експерименталне и контролне групе, која се огледа у незнатним разликама по било ком посматраном аспекту. За експеримент би било боље да су групе још бројније, али с обзиром на природу педагошког експеримента (математика, па још и додатна настава), тешко да се може постићи већа бројност, јер је тешко наћи гимназију у којој је преко тридесет ученика заинтересовано за додатну наставу математике.

10.5.3. ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

Поред већ презентиране анкете, у овом педагошком експерименту као инструменти за истраживање коришћени су и:

- Анкетни упитник 3
- Иницијални тест знања CDIN/04
- Тест интелигенције
- Финални тест знања CDFI/05

Анкетни упитник 3³⁴⁵ је имао за циљ да, колико је то могуће, упореди мотивацију ученика експерименталне и контролне групе за математику и додатни рад у области математике. Ученици су се изјашњавали о три наставна предмета (која се налазе у наставном плану гимназије) који су им најзанимљивији, а изјашњавање је извршено по редоследу занимљивости.

³⁴⁵ Видети Прилог 20.

Иницијални тест знања CDIN/04³⁴⁶ је нестандардизован тест који је коришћен са циљем да се утврде предзнања ученика – учесника експеримента у области теорије бројева. Тест је коришћен за утврђивање претходних знања из дељивости, простих бројева, НЗС и НЗД, Диофантових једначина. Представља низ задатака објективног типа (неформални тест). Садржи 10 задатака различитог нивоа сложености и обухвата градиво редовне и додатне наставе математике од петог до осмог разреда основне школе (дељивост, просте бројеве, НЗД, НЗС, Диофантове једначине).

У тесту су заступљени сви типови задатака: алтернације ("да", "не"), компензације (пресећање и допуњавање), комбинације (сређивања и упоређивања), селекције (вишеструког избора). Већина задатака је по тематици и садржају била доступна ученицима и у основној школи, а у тесту су дати оригинални текстови проблема који су резултат досадашњег практичног рада.

Поред тога што је намена теста била провера уједначености група у претходним знањима из теорије бројева, тест је послужио и као индикатор неопходних предзнања везаних за Диофантове једначине, што је значајно помогло код припремања стручно - методичког материјала.

Посебно сондажно испитивање теста, због евентуалне коначне формулације и одређивање времена које је потребно за решавање задатака, није било потребно будући да се слични задаци примењују сваке године у иницијалном испитивању предзнања из математике код гимназијалаца.³⁴⁷

На крају се мора споменути и то, да ма како да је тест састављен, он увек има својих мана. Заправо, увид у право знање ученика не може се добити само на основу теста, јер он пружа увид само у оно знање које се добија као одговор на постављена питања.

Тест интелигенције³⁴⁸ учесника педагошког експеримента реализован је на основу батерије тестова интелектуалних способности. Сва три теста у батерији мере посебне аспекте једне опште интелектуалне способности. Уврштавање тестова са различитим садржајем (вербални, нумерички и фигурални) управо има за циљ да захвати најчешће врсте материјала у коме се испољавају интелектуалне способности. Концепција способности која лежи у основи ове батерије тестова је еклектичка – она прихвата и Терстонову (Thurstone), идеју о посебним способностима, али и Спирманову (Spearman) односно Вернонову (Vernon) о општој интелектуалној способности. У многим истраживањима до сада показано је да ове посебне способности стоје у позитивним и значајним корелацијама (Ковачевић, 1982).³⁴⁹

³⁴⁶ Видети Прилог 21.

³⁴⁷ Аутор је један од учесника иницијалног испитивања математичких предзнања ученика првог разреда, које се годинама реализује у Ваљевској гимназији

³⁴⁸ Видети Прилог 22.

³⁴⁹ Видети [10.182] Ковачевић, П.: Интелектуалне операције у тестовима способности са нумеричким садржајем - Докторска дисертација, Београд, 1982, Филозофски Факултет

Тест ВЕРБАЛНЕ АНАЛОГИЈЕ (ВР 1) мери способност вербалног схватања. Овај тест је један од најбољих маркера фактора вербалног схватања, али такође и опште интелектуалне способности. Састоји се од задатака у којима се од испитаника тражи да закључи какав однос постоји између једног пара речи; исти такав однос постоји између следеће речи и једне од пет речи понуђених као могућа решења. Испитаник треба да подвуче ту реч међу понуђенима. Ради се, дакле, о откривању релације у првом пару речи, а затим на основу познате релације и једног корелата треба комплетирати други пар речи. Тест је за основу имао субтест Вербалне аналогije из вербалне серије Борисава Стевановића, а модификовао га је Александар Буквић. Тест има један пример, два задатка за вежбу и 30 задатака у радном делу. Решава се четири и по минута. Скор испитаника је збир тачних одговора, а максималан износи 30.

Тест СЕРИЈЕ БРОЈЕВА је један од најпознатијих нумеричких тестова који мере фактор нумеричког резоновања (Ковачевић, 1982) али и фактор опште способности. У тесту је рачунски део мање истакнут у корист резоновања. Тест је преузет из батерије ЕДПМ за испитивање програмера. Састоји се од 26 задатака. Задатак се састоји од низа од шест бројева, а испитаник треба да закључи који је следећи члан низа. Тачно решење налази се међу пет понуђених одговора, а испитаник треба да га заокружи. Поред 26 задатака у радном делу, тест има четири задатка који служе као вежба. Максималан скор је 26, време решавања 12 минута.

Тест РАЗЛАГАЊЕ КВАДРАТА (F2) мери просторно перцептивну способност и општу интелектуалну способност. Аутор ове верзије теста је Александар Буквић, а као основа за његов модификовани тест послужио је познати сличан субтест из Армијске серије Бета у коме испитаник треба оловком да раздели један квадрат тако да се добију делови нацртани поред квадрата. Модификација А. Буквића се састоји у изbacивању неких задатака из старе верзије и уношењу већег броја нових, што је повећало укупан број задатака на 27. Такође, сваки елеменат и квадрат који треба разделити на делове окружени су мрежом водоравних и хоризонталних линија, што олакшава решавање. Тест има један задатак као пример и три за вежбу. Максималан број бодова је 27, а време решавања теста 7 минута.

Финални тест знања CDFI/05³⁵⁰ такође спада у неформалне тестове и обухвата градиво обрађено у току експерименталног рада. Тест садржи 6 задатака типа алтернације, компензације, комбинације и селекције. Поред испитивања обима знања везаних за решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости, тест испитује и примену тог знања. Такође, испитује се и разумевање, као и схватање узајамних односа.

³⁵⁰ Видети Прилог 23.

И поред тога што тестови неформалног типа не захтевају проверу свих битних мерних карактеристика, његова валидност је евидентна, будући да садрже већину градива и садржаја које желимо испитати и да је већи број сличних задатака до сада пуно пута провераван у пракси

10.6. РЕЗУЛТАТИ ИНИЦИЈАЛНИХ ИСПИТИВАЊА

10.6.1. ИСПИТИВАЊЕ МОТИВАЦИЈЕ УЧЕНИКА

Истраживано интересовање ученика за изучавање појединих наставних предмета и резултати анкете показују апсолутну уједначеност интересовања за математику и физику у обе групе када је у питању примарно опредељење ученика – учесника експеримента. Код изјашњавања за други и трећи омиљени предмет нешто више наклоности ка математици и физици има експериментална група. Уочава се да је код 93,33% ученика експерименталне и 80,00% ученика контролне групе, математика међу три најзанимљивија наставна предмета, што говори о високој мотивисаности ученика за додатни рад у области математике. Занимљиво је да свега 2 ученика експерименталне и 6 ученика у контролној групи, дакле, укупно 8 учесника експеримента или 13,33% у прва три омиљена предмета не стављају математику.

Резултати анкете дати су у наредној табели:

ИНТЕРЕСОВАЊЕ УЧЕНИКА ЗА НАСТАВНЕ ПРЕДМЕТЕ							
ГРУПА	НАСТАВНИ ПРЕДМЕТ	1	%	2	%	3	%
Е	МАТЕМАТИКА	17	56,67	3	10,53	8	27,78
	ФИЗИКА	5	16,67	11	36,84	8	27,78
	ИНФОРМАТ	3	10,00	2	5,26	4	13,33
	ОСТАЛО	5	16,67	14	47,37	10	33,33
К	МАТЕМАТИКА	17	56,67	2	7,14	5	15,38
	ФИЗИКА	5	16,67	9	28,57	2	7,69
	ИНФОРМАТ	2	6,67	2	7,14	5	15,38
	ОСТАЛО	6	20,00	17	57,14	18	61,54
УКУПНО	МАТЕМАТИКА	34	56,67	5	8,83	13	21,58
	ФИЗИКА	10	16,67	20	33,33	11	17,74
	ИНФОРМАТ	5	8,33	4	6,20	9	14,36
	ОСТАЛО	11	18,33	31	52,26	27	45,00

Егзактно статистичко истраживање мотивације ученика извршено је тако што је изјашњавање за математику на првом месту оцењено са 5, на другом месту са 4, на трећем месту са 3, а изостављање са листе интересовања оцењено са 2.

Статистичка обрада рађена је t тестом разлике аритметичких средина независних узорака³⁵¹ који показује да ли постоји значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе. Добијен је следећи статистички резултат.

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		Е – ГРУПА	К- ГРУПА
Бројност популације	n	30	30
Средња вредност резултата	\bar{x}	4,17	4
Стандардна девијација	σ	2,78	1,24
Коефицијент варијације	V	66,60	30,96
Процент освојених бодова	%	83,33	80
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma \bar{x}$	0,77	0,74
Апсолутна разлика аритметичких средина	$d \bar{x}$	0,17	
Стандардна грешка разлике арит. средина	$\sigma d \bar{x}$	1,07	
Критички однос	t	0,16	
Степени слободе	df	58	
Ниво значајности на	0,05	2,00	
Ниво значајности на	0,01	2,66	

С обзиром да таблична вредност горњег нивоа значајности на 0,05 износи 2,00 и на 0,01 износи 2,66 и с обзиром да је критички параметар $t = 0,16$ далеко испод горњег нивоа значајности, закључујемо да је разлика у мотивацији ученика експерименталне и контролне групе безначајна.

10.6.2. ИНИЦИЈАЛНО ИСПИТИВАЊЕ ЗНАЊА ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

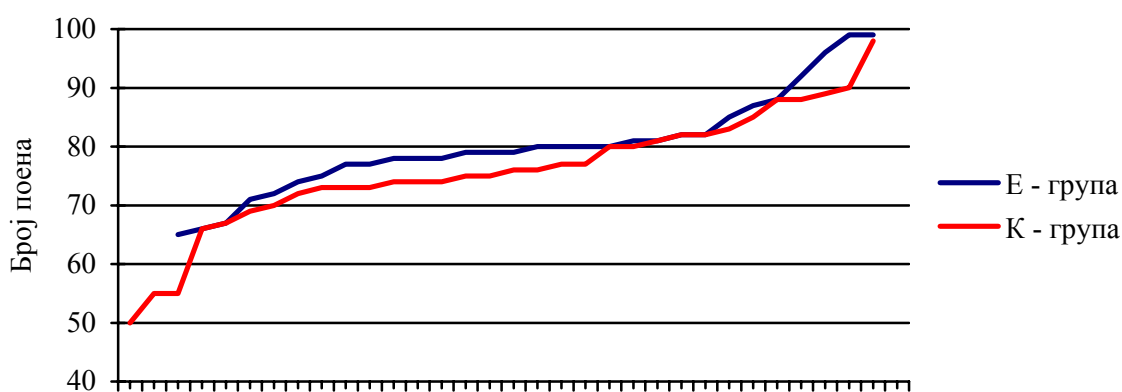
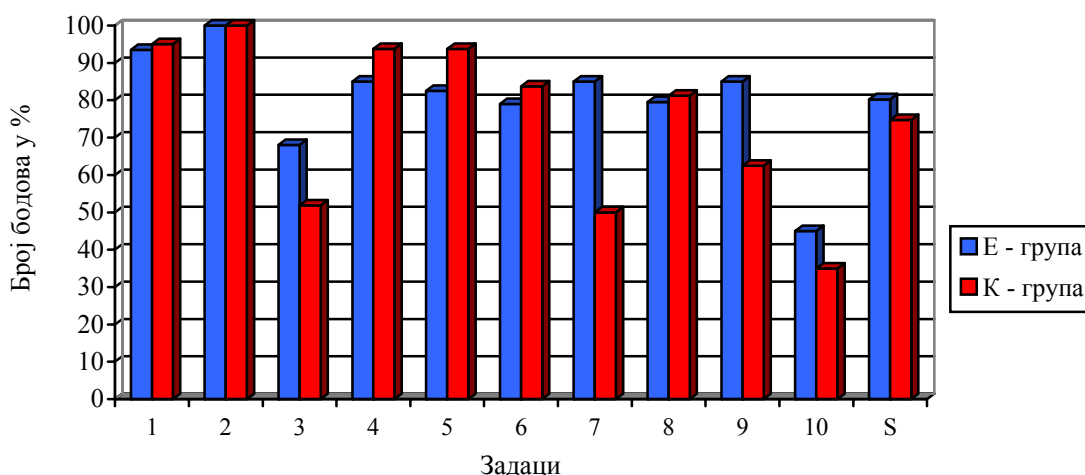
Иницијални тест знања из теорије бројева садржао је десет задатака од којих је сваки бодован са 10 бодова. Резултати иницијалног теста по задацима у просечном износу бодова дати су у наредној табели и упоредном хистограму који следи:

ЗАДАТАК	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Е- група	93,50	100	68,00	85,00	82,50	79,00	85,00	79,50	85,00	45,00	80,25
К – група	95,00	100	51,87	93,75	93,75	83,75	50,00	81,25	62,50	35,00	74,69
Просек	94,25	100	59,94	89,37	88,12	81,38	67,5	80,38	73,75	40,00	77,47

³⁵¹ Видети Прилог 24.

Експериментална група је у на тесту остварила у просеку 80,25 бодова, а контролна 74,69 бодова, што значи да су у просеку учесници тестирања остварили резултат од 77,47 бодова. Најуспешније је решен 2. задатак (дељивост), кога су обе групе решиле са 100%, а најслабије решен задатак је 10. (опште решење Диофантове једначине) са 40% (експериментална група 45%, контролна 35%). Експериментална група је успешније решила четири задатка (3, 7, 9. и 10.), а контролна пет задатака (1, 4, 5, 6. и 8.). Сви задаци су у потпуности решени, изузев 3, јер од могућих десет бодова ниједан од учесника експеримента није тачно набројао све просте бројеве мање од 100 и највећи број освојених бодова на овом задатку је 9.

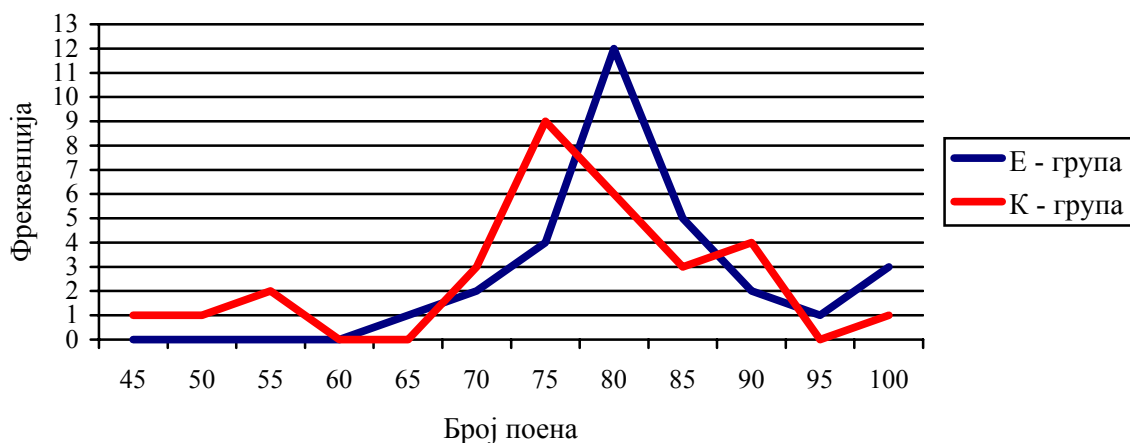
Упоредни хистограм



Дистрибуција броја поена у растућем низу

Из претходног графикона се види незнатна разлика у дистрибуцији бодова на иницијалном тестирању између експерименталне и контролне групе, јер се криве дистрибуције скоро поклапају.

Следећи графикон даје податке о фреквенцији бодова у експерименталној и контролној групи. Најмањи број бодова на тесту је 45 бодова (контролна група), а највећи 99 (експериментална група). Највећа фреквенција је око 75 бодова у контролној (9 ученика) и око 80 бодова (12 ученика) у експерименталној групи. Очигледно је да је расподела фреквенција у обе групе нормална са извесним модификацијама, што код оваквих експеримената има и практично оправдање.



Статистичка обрада теста знања реализована је на основу бодовног постигнућа ученика, анализом средњих вредности. Статистичка обрада рађена је t тестом разлике аритметичких средина независних узорака који показује да ли постоји значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе. Добијен је следећи статистички резултат:

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		Е – ГРУПА	К- ГРУПА
Бројност популације	N	30	30
Средња вредност резултата	\bar{x}	80,25	74,69
Стандардна девијација	σ	10,25	14,98
Коефицијент варијације	V	12,77	20,06
Процент освојених бодова	%	80,25	74,69
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma \bar{x}$	2,35	3,87
Апсолутна разлика аритметичких средина	$D \bar{x}$	5,56	
Стандардна грешка разлике арит. средина	$\sigma d \bar{x}$	4,53	
Критички однос	t	1,23	
Степени слободе	df	58	
Ниво значајности на	0,05	2,00	
Ниво значајности на	0,01	2,66	

Како је критички t скор 1,23 значајно испод критичног 2,00 (на нивоу значајности на 0,05), односно 2,66 (на нивоу значајности на 0,01), то разлика у постигнућима на иницијалном тесту из теорије бројева између експерименталне и контролне групе није значајна, односно групе имају приближан ниво предзнања везаних за теорију бројева.

10.6.3. ТЕСТ ИНТЕЛИГЕНЦИЈЕ

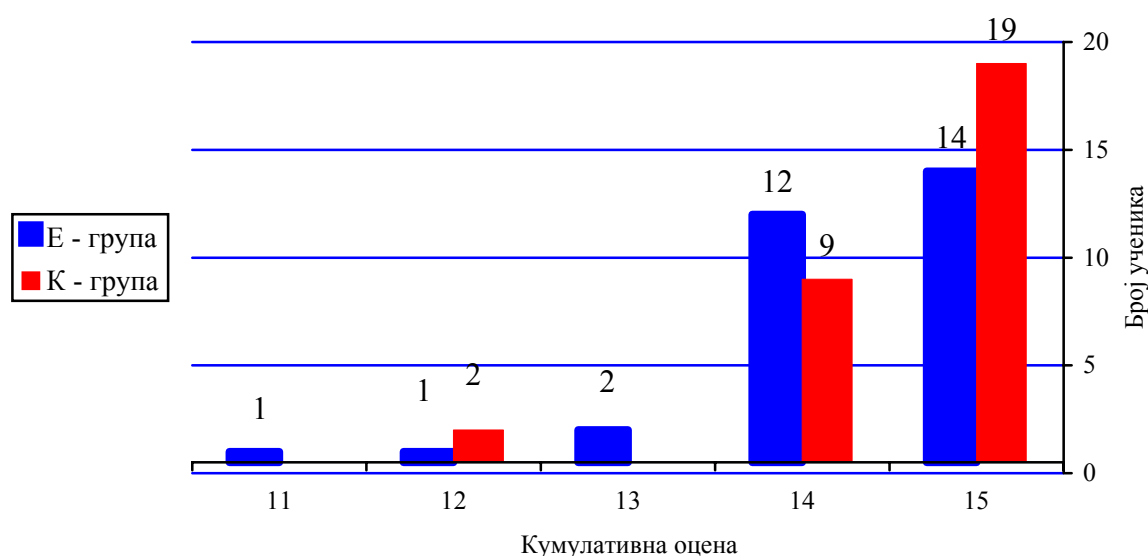
Резултати теста интелигенције дати су у наредној табели, при чему је дата анализа за сваки тест посебно и за целу батерију тестова сумарно:

СТАТИСТИЧКИ ПОКАЗАТЕЉ		Е –ГРУПА	К –ГРУПА
ВЕРБАЛНЕ АНАЛОГИЈЕ (30)	Просек броја бодова	18,78	20,5
	% решених задатака	62,61	68,33
	Просечна оцена	4,48	4,63
СЕРИЈА БРОЈЕВА (26)	Просек броја бодова	19,61	20,69
	% решених задатака	75,42	79,57
	Просечна оцена	4,83	4,94
РАЗЛАГАЊЕ КВАДРАТА (27)	Просек броја бодова	20,83	19,44
	% решених задатака	77,13	71,99
	Просечна оцена	4,91	4,94
СУМАРНИ РЕЗУЛТАТ	Просек броја бодова	59,22	60,63
	% решених задатака	71,35	73,04
	Просечна оцена	14,22	14,5

Сумарни резултат анкете јасно исказује чињеницу да је нешто бољи резултат постигла контролна група, која је од максималних 83 бода у просеку оставарила 60, 63 или 73,04 % и за то је оцењена средњом оценом 14,5 (максимална могућа оцена је 15). Експериментална група је постигла нешто, али незнатно, слабији резултат од просечних 59,22 бодова или 71,35% решених задатака и просечну оцелу 14,22, што већ на први поглед говори о уједначености група и високом степену интелектуалних способности ученика у обе групе. Интересантно је да је на тестовима вербалних аналогија и серија бројева боље резултате постигла контролна, а на тесту разлагања квадрата експериментална група, при чему су опет разлике у резултату занемарљиве.

Ако посматрамо резултате на тестовима серије бројева и разлагања квадрата који у великој мери испитују математичке способности, онда се види веома добар утицај у решавању проблема и експерименталне и контролне групе који се креће од 71,99% па чак до 79,57%. Просечна оцена на ова два теста је при том у интервалу од 4,83 до 4,94, што заједно говори да су учесници експеримента – ученици заиста високих математичких способности.

Графикон фреквенције оцена



Када је у питању тумачење резултата теста онда је јасно да ученици са оценом 14 и 15 спадају у категорију ученика са интелигенцијом знатно изнад просека, ученици са оценом 12 и 13 у категорију ученика изнад просечне интелигенције, а 11, 10 и 9 у категорију ученика просечне интелигенције. Поредићи ове критеријуме са средњим вредностима оцена, јасно је да се и експериментална и контролна група налазе у категорији ученика чија је интелигенција изнад просека.

Статистичка обрада батерије тестова интелигенције реализована је на основу сумарне оцена батерије, анализом средњих вредности оцена. Статистичка обрада рађена је t тестом разлике аритметичких средина независних узорака који показује да ли постоји значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе. Добијен је следећи статистички резултат:

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		Е – ГРУПА	К- ГРУПА
Бројност популације	n	30	30
Средња вредност резултата	\bar{x}	14,22	14,5
Стандардна девијација	σ	1,30	0,79
Коефицијент варијације	V	9,12	5,45
Процент освојених бодова	%	71,35	73,04
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma \bar{x}$	3,26	3,74
Апсолутна разлика аритметичких средина	$d \bar{x}$	0,28	
Стандардна грешка разлике арит. средина	$\sigma d \bar{x}$	4,97	
Критички однос	t	0,06	
Степени слободe	df	58	
Ниво значајности на	0,05	2,00	
Ниво значајности на	0,01	2,66	

Како је критички t скор 0,06 далеко испод критичног 2,00 (на нивоу значајности на 0,05), односно 2,66 (на нивоу значајности на 0,01), то разлика у постигнућима на батерији тестова интелигенције између експерименталне и контролне групе није значајна, односно групе имају приближан ниво интелектуалних способности.

10.7. РЕЗУЛТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТА

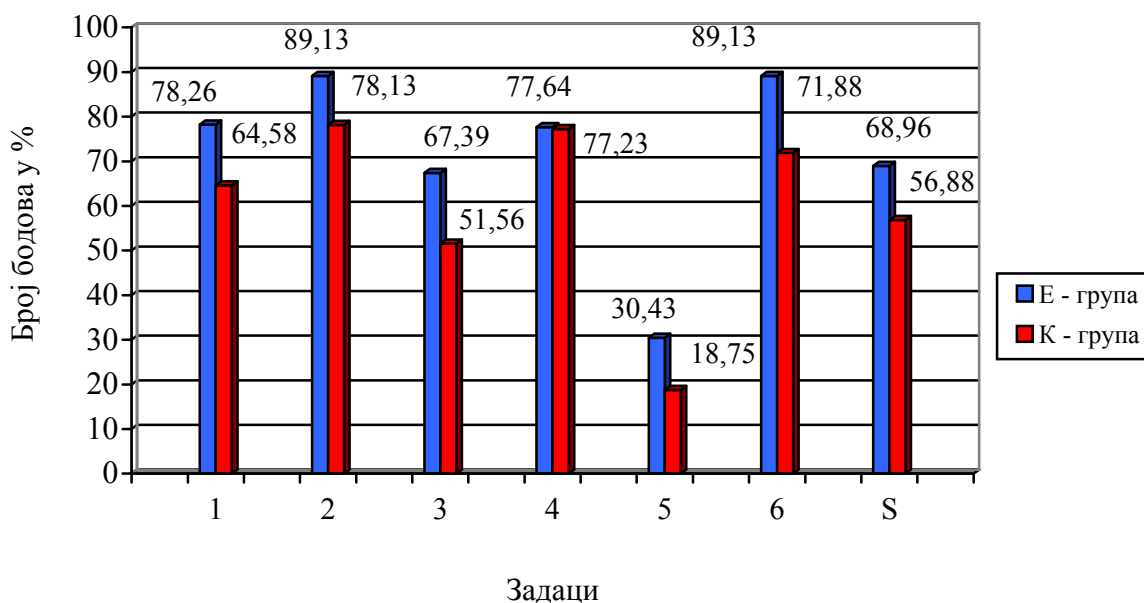
По завршетку методске јединице "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости", односно на крају експерименталног рада приступило се финалном мерењу знања ученика. Тестирање је извршено 21. 10. 2005. године, а циљ финалног тестирања је био сагледавање у којој мери је експериментални фактор (интерактивни рад) утицао на успех ученика експерименталне групе.

Тест CDFI/05 садржи 6 задатака који покривају пређену материју за време експеримента. Исти тест су радиле и експериментална и контролна група, јер је исто градиво реализовано у обе групе.

Најпре ћемо анализирати појединачни успех група по задацима, дистрибуцију освојених бодова и фреквенције добијених бодова, а потом размотрити глобални успех група на тесту CDFI/05 и направити одговарајућу статистичку анализу.

Упоредни хистограм показује да је експериментална група на свим задацима постигла бољи успех од контролне. Средња вредност броја освојених бодова експерименталне групе је 68,96, док је средња вредност бодова код контролне групе 56,88, што значи да је разлика аритметичких средина 12,06 бодова.

Упоредни хистограм

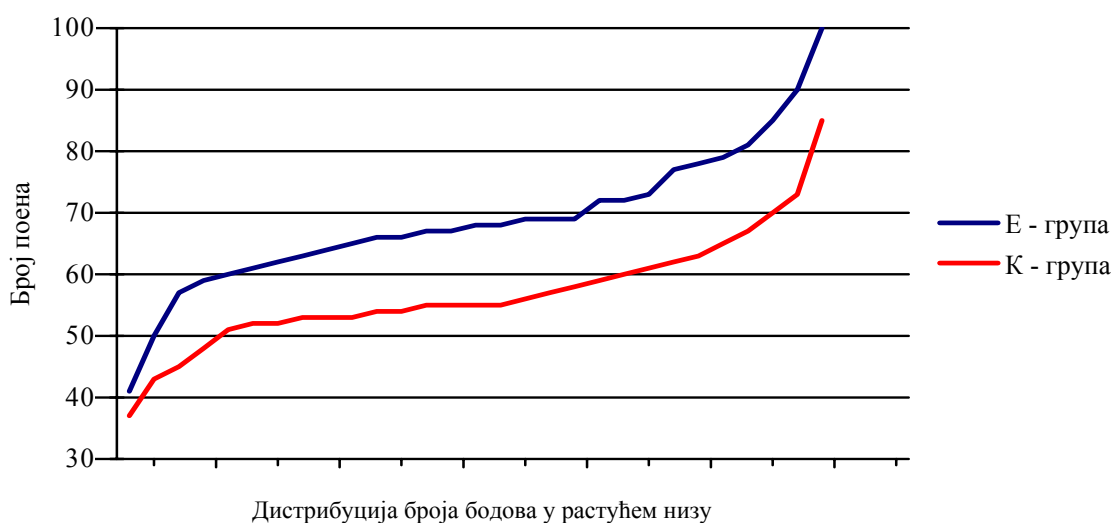


Најбоље решени задатак је задатак у обе групе је задатак 2. (проблем са двоцифреним природним бројевима), што се могло и очекивати јер је сличан³⁵² садржан у методичком материјалу за реализацију наставне теме. Најслабије решен задатак, такође у обе групе, је 5. задатак (Диофантова једначина четвртог степена), што је такође реално, јер на алгебарским трансформацијама и неједнакостима алгебарских израза тек предстоји посао и у редовној и у додатној настави. Занимљиво је да је једини задатак који нема преко 50% освојених бодова управо задатак 5, али и да ниједан задатак није решен са више од 90% бодова.

Најмања разлика између контролне и експерименталне групе је код задатка број 4, што се могло и очекивати, јер је то задатак који је рађен и у једној и у другој групи и који је дат са намером да се провери трајност стечених знања (фактор заборављања). Највећа разлика је код задатка број 6, док је код осталих задатака та разлика углавном уједначена.

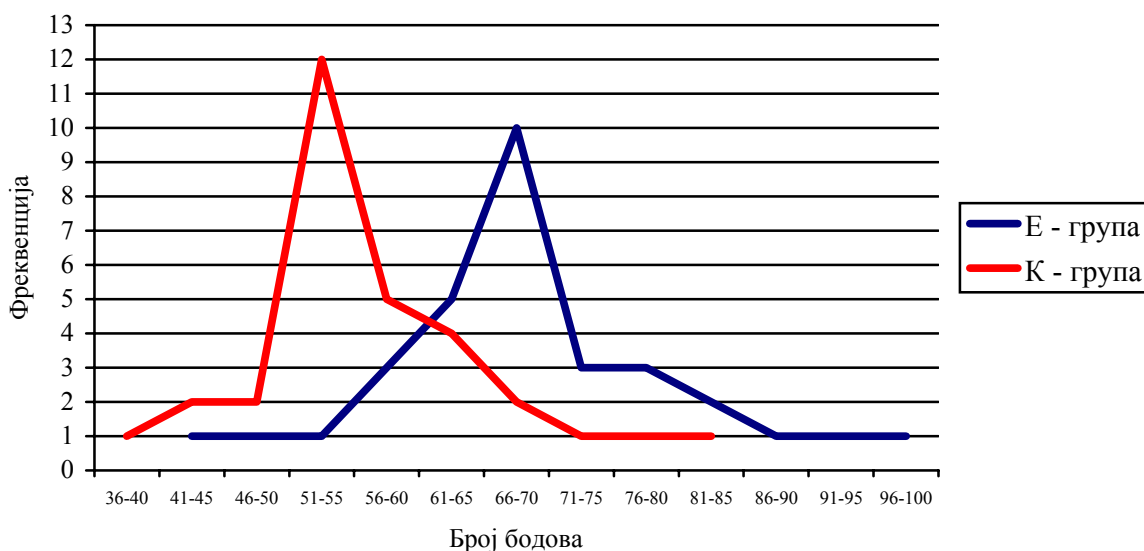
Иначе редослед задатака по просечној решености је: 2. (83,63%), 6. (80,51%), 4. (77,44%), 1. (71,42%), 3. (59,48%) и 5. (24,59%), док је средња вредност свих решених задатака 62,92%. Ови подаци говоре и о чињеници да су само задаци 3 и 5, испод просечног броја бодова (3. незнатно, 5. значајно) и да је вероватно једино задатак 5 изнад тренутних интелектуалних и математичких способности ученика.

Дистрибуција броја бодова у растућем низу показује да, за разлику од иницијалног теста, где су криве дистрибуције за експерименталну и контролну групу биле скоро припојене једна уз другу, код финалног теста међу њима постоји уочљива разлика.



³⁵² У припреми је рађен задатак са збиром куба цифре десетица и квадрата цифре јединица, а на тесту је дат задатак са збиром куба цифре јединица и квадрата цифре десетица.

Најнижи број освојених бодова је 37 у контролној и 41 у експерименталној групи, а највиши је 85 у контролној и 100 бодова у експерименталној групи, с тим што у експерименталној групи други најбољи резултат износи 90 бодова, а трећи 85 бодова.



Ако се анализира расподела броја бодова код контроле и експерименталне групе, уочљиво је да је та расподела код обе групе релативно нормална, при чему је врх расподеле врло близу средњој вредности броја поена у групи. Из графикона је уочљива и разлика у постигнућима група, јер су врхови расподеле значајно померени у односу на иницијални тест када су били врло близу, тако рећи један уз други.

Статистички подаци о резултатима финалног мерења знања дати су у табели:

СТАТИСТИЧКА ВЕЛИЧИНА		Е – ГРУПА	К- ГРУПА
Бројност популације	n	30	30
Средња вредност резултата	\bar{x}	68,96	56,88
Стандардна девијација	σ	10,11	9,03
Коефицијент варијације	V	14,65	15,88
Процент освојених бодова	%	68,96	56,88
Стандардна грешка аритметичке средине	$\sigma \bar{x}$	2,15	2,33
Апсолутна разлика аритметичких средина	$d \bar{x}$	12,08	
Стандардна грешка разлике арит. средина	$\sigma d \bar{x}$	3,17	
Критички однос	t	3,80	
Степени слободe	df	58	
Ниво значајности на	0,05	2,00	
Ниво значајности на	0,01	2,66	

Добијени подаци говоре да је аритметичких средина броја освојених бодова код експерименталне групе 68,96, а код контролне 56,88 и да је њихова разлика 12,08. Мада се ова разлика у односу на тест предзнања из теорије бројева чини незнатном она је значајна, јер су групе и у предзнањима и у интелектуалним способностима скоро идентичног потенцијала.

Стандардна девијација код експерименталне групе је 10,11, а код контролне 9,03. На основу добијених података израчуната је t - вредност критичког односа која износи 3,80³⁵³ и показује да је разлика аритметичких средина експерименталне и контролне групе значајна у корист експерименталне групе. Значајност се огледа како на нивоу 0,05, тако и на нивоу 0,01, јер премашује границе значајности на тим нивоима које износе 2,00 и 2,66. Будући да су сви важни фактори експеримента били контролисани и уједначени (што су претходно дати и анализирани подаци и доказали), настала разлика се може приписати дејству експерименталног фактора. То значи да је наша хипотеза да ће обрада теме "Решавање Диофантових једначина коришћењем неједнакости" применом интерактивне наставе дати већи образовни учинак него при одржавању наставе класичним путем, у потпуности потврђена.

Финално истраживање потврдило је и подхипотезе јер:

- Ученици који су знања из решавања Диофантових једначина коришћењем неједнакости стицали интерактивним путем ефикасније су решили задатке и код свих задатака показали боље резултате, а разлика се креће од 0,41 бода на 4. задатку до 17,25 бодова на 6. задатку.
- Експериментална група је у решавању задатка 3. показала за 15,83 бодова бољи резултат од контролне групе што доказује да се значајно боље сналази на непознатим проблемима (проблемима који нису били присутни у наставном раду ни код експерименталне ни код контролне групе).
- Ученици који су имали интерактивну наставу скоро два пута успешније су решили и проблеме који имају сличну идеју са већ виђеним (задатак 5.), што доказује да се садржаји научени интерактивним путем успешније примењују од оних који су научени "класично". Међутим, овај задатак показује и да његов садржај изгледа превазилази предзнања, апаратуру и тренутне математичке способности учесника експеримента без обзира којој групи припадају.
- Експериментална група је показала и да ефикасније решава диофантске проблеме (задатак 2. и задатак 6.), што доказује да интерактивна настава има позитиван утицај и на моделирање проблема и решавање добијеног математичког модела.

³⁵³ Ова t вредност не одудара значајно од одговарајућих вредности које су добили у сличним истраживањима у ранијем периоду Р. Деспотовић (1983) $t = 4,36$; Т. Петровић (1988) $t = 4,49$; М. Дејић (1996) $t = 5,80$; М. Анђић (2004) $t = 5,45$.

Међутим, истраживањем је утврђено да су поједини ученици који су на иницијалном тесту знања и финалном тесту показали веома добре резултате и који су имали доста успеха на математичким такмичењима у основној школи, а и прилично добар резултат на тестовима серије бројева и разлагања квадрата, имали прилично низак резултат на тесту вербалних аналогича. Овај податак указује на изузетну осетљивост и сложеност рада са обдаренима, као и на потребу сталних, макар и интерних истраживања, јер се ради о младим и талентованим људима и узрасту у коме се многе правилно дијагностициране ствари, организованим и осмишљеним радом, још увек могу поправити.

10.8. АНАЛИЗА И СИНТЕЗА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Резултати иницијалног истраживања и финалног мерења знања су екзактно доказали да је:

- 1) Експериментална група имала нешто интензивније припреме за математичка такмичења у основној школи и нешто боље резултате на математичким такмичењима, незнатно бољу образовну структуру родитеља и образовни стандард породице, мало бољу мотивацију за додатни рад и нешто квалитетнија предзнања из теорије бројева.
- 2) Контролна група има незнатну предност у полној структури, општем успеху и успеху ученика из математике од 5. до 8. разреда, мало интензивнији додатни рад из математике у основној школи и незнатно виши ниво интелектуалних и математичких способности.
- 3) Код свих посматраних, и у претходне две тачке исказаних иницијалних параметара, суштинске разлике између експерименталне и контролне групе су практично безначајне, што је статистичком анализом и доказано.
- 4) Финално мерење знања показало је да је експериментална група током реализације педагошког експеримента показала значајно боље резултате од контролне групе што је статистичком обрадом резултата финалног теста и доказано, чиме је у потпуности потврђена експериментална хипотеза да су ефекти интерактивни наставе значајно већи од класичне наставе.
- 5) Резултати педагошког експеримента су потврдили и постављене подхипотезе.
- 6) Педагошки експеримент је указао на потребу иницијалних истраживања сваке генерације обдарених ученика и потребу упоређивања њихових иницијалних способности са резултатима и ефектима експерименталних наставних активности.
- 7) Педагошки експеримент је потврдио потребу да се поред глобалне анализе резултата експеримента, праве и анализе појединачних случајева, јер поуке из таквог начина обраде добијених података могу бити драгоцене за индивидуални приступ сваком за математику обдареном ученику.