КАКО ЋУ РЕШИТИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАТАК?

Теоретичари решавања математичких проблема[299] разликују две врсте математичких проблема: конструктивни проблеми и проблеми доказивања. Решавање конструтруктивних задатака подразумева конструкцију новог математичког објекта (геометријска фигура или тело, скуп бројева, низ, формула ...) или израчунавање неких његових битних карактеристика (обим, површина, запремина, елементи скупа, ...) који задовољавају све постављене услове. Решавање доказних задатака је поступак којим се из датих услова који важе за један или више математичких објеката, коришћењем одређених логичких и математичких правила доказује неко ново својство или однос датих математичких творевина.

На први поглед решавање Диофантових једначине се може убројати у конструктивне проблеме. И то је сигурно тачно, уз напомену да је решавање Диофантових једначина истовремено и доказни задатак, јер је најчешће поред одређивања решења (ако оно постоји) потребно доказати да су то сва решења, тј. да проблем нема других решења. Отуда решавање Диофантових једначина спада у ред ретких математичких задатака који у једном решењу најчешће садрже и конструктивни и доказни део.

Чувени амерички математичар (мађарског порекла) Ђерђ Поја у својој популарно написаној књизи "Како ћу решити математички задатак?"[300] даје и на примерима објашњава један врло употребљив општи алгоритам за решавање математичких проблема. То је поступак сигурно треба да буде увек на уму сваком даровитом ученику и зато је у раду са даровитима неопходно да се добро илуструје поменути алгоритам. Наравно, неће сам алгоритам решити ниједну Диофантову једначину, али може много помоћи да се његовим коришћењем издиференцирају фазе у решавању и корак по корак дата једначина трансформише у облик из кога се далеко лакше добијају тражена решења, дефинише опште решење и доказује да једначина нема других решења.

Алгоритам за решавање математичких проблема који предлаже Ђерђ Поја дат је у следећој табели:

<table>
<tr><th>ПРВО</th><th>РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА</th></tr>
<tr><td rowspan="4">ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК</td><td>▪ Шта је непознато?
▪ Шта је задато?
▪ Како гласи услов?</td></tr>
<tr><td>▪ Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?</td></tr>
<tr><td>▪ Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!</td></tr>
<tr><td>▪ Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?</td></tr>
</table>

299 Видети књигу [9.175.] Джордж Пойа - Математическое открытие – "Наука" – Москва ,1976.

300 Видети књигу [8.173.] Ђерђ Поја: Како ћу решити математички задатак? – "Школска књига" - Загреб, 1966.

ДРУГО	**ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА**
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ! АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.	▪ Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику? ▪ Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи? ▪ Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату! ▪ Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити? Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен? Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти олакшао употребу тог задатка? ▪ Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!
НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или дате податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи? ▪ Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?
ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?
ЧЕТВРТО	**ПРОВЕРА**
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ? ▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед? ▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?

ПРИМЕНА АЛГОРИТМА "КАКО ЋУ РЕШИТИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАТАК?" НА ЈЕДАН ДИОФАНТСКИ ПРОБЛЕМ

<u>*ЗАДАТАК.*</u> *На колико различитих начина Влада, Нада и Јагода могу да поделе 100 бомбона, а да свако од њих добије макар једну бомбону.*

ПРВО	**РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА**	**РАЗМИШЉАЊА - ОДГОВОРИ**
ТРЕБА ДА РАЗУМЕШ ЗАДАТАК	▪ Шта је непознато? ▪ Шта је задато? ▪ Како гласи услов?	▪ Број начина на који се може извршити подела ▪ Број бомбона - 100 ▪ Свако мора добити бар једну бомбону
	▪ Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?	▪ Са условом је све у реду, јер не омета решавање проблема ни у једном погледу, а није ни контрадикторан
	▪ Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!	▪ Ако број бомбона које добију Влада, Нада и Јагода редом означимо са x, y и z, онда је наш проблем сведен на једначину $x + y + z = 100$, уз услове: $1 \le x \le 98$, $1 \le y \le 98$, $1 \le z \le 98$. ▪ Цртеж би могао да изгледао овако * * * * ... * * * * ... * * * * 100
	▪ Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?	▪ Двоје могу да добију само по 1 бомбону.
ДРУГО	**ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА**	
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!	▪ Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?	▪ Да али са врло малим бројевима (напр. 7, 8), па се број могућности могао лако пребројати.
	▪ Знаш ли неки сродни задатак? Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?	▪ Нисам видео ниједну теорему која директно решава дати проблем

АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ. НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ ПЛАН РЕШАВАЊА.	▪ Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!	▪ Ако се фиксира непозната z онда би се проблем свео на једначину са две непознате: $x + y = n$. $(1 \leq x \leq n - 1; 1 \leq y \leq n - 1)$.
	▪ Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак!	▪ Ако је $x + y = n$, онда дата једначина има решења $(1, n-1)$; $(2, n-2)$; $(n-2, 2)$ и $(n-1, 1)$. Дакле једначина $x + y = n$ има тачно $n-1$ решење.
		▪ Сада је могуће решавати једначину по фиксираним z и на крају сабрати број добијених решења.
ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**	
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	▪ Када користиш план решавања, контролиши сваки корак! ▪ Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ▪ Можеш ли доказати да је исправан?	▪ За $z = 1$, добија се једначина $x + y = 99$, која има 98 решења. За $z = 2$, добија се једначина $x + y = 98$ која има 97 решења ... За $z = 97$, добија се једначина $x + y = 3$ која има 2 решења и за $z = 98$ добија се једначина $x + y = 2$ која има 1 решење. Дакле укупан број решења, тј. начина је $98 + 97 + ... + 2 + 1 = (98 \cdot 99):2 = 99 \cdot 49 = 4851$.
ЧЕТВРТО	**ПРОВЕРА**	
ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ	▪ Можеш ли проверити резултат? ▪ Можеш ли проверити доказ?	▪ Нјалакша провера је ако се проблем реши на други начин
	▪ Можеш ли резултат извести другачије? ▪ Можеш ли га уочити на први поглед?	▪ Може коришћењем "преграда". Дакле, на датој слици се могу поставити две преграде које бомбоне деле на три скупа. Како се две преграде могу поставити на 99 места то је укупан број могућности једнак броју комбинација од 99 елемената 2 класе, дакле опет $(98 \cdot 99):2 = 99 \cdot 49 = 4851$.
	▪ Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?	▪ Наравно. Неки од могућих проблема су: ▪ <u>ЗАДАТАК 1.</u> Ако је n природан број, колико решења у скупу природних бројева има једначина $x + y + z = n$? ▪ <u>ЗАДАТАК 2.</u> На колико начина Влада, Нада и Јагода могу поделити n јабука, тако да неко од њих може остати без иједне јабуке?

ПРИМЕНА АЛГОРИТМА "КАКО ЋУ РЕШИТИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАТАК?" НА ЈЕДНУ ДИОФАНТОВУ ЈЕДНАЧИНУ

<u>ЗАДАТАК:</u> *Одредити све целе бројеве x, y и z за које је* $2^x + 3^y = z^2$.

РЕШЕЊЕ: <u>Прва фаза</u> – разумевања проблема подразумева све оно што се односи на анализу задатих услова. Како су бројеви 2^x и 3^y позитивни то је и $z^2 > 0$, па се може закључити да је $z \neq 0$. С друге стране ако је било који од бројева x и y негативан онда су бројеви 2^x и 3^y рационални бројеви мањи или једнаки $\frac{1}{2}$, односно $\frac{1}{3}$, па њихов збир никада није цео број, што значи да нема потребе тражити решење за негативно x и за негативно y. Дакле, једина могућа област у којој се налазе решења је, гледајући уређени пар (x, y) као тачку у xOy координатном систему, први квадрант укључујући и координатне осе. Према томе имамо посла са три једначине:

1) Ако је $x = 0$, онда је $1 + 3^y = z^2$;
2) Ако је $y = 0$, онда је $2^x + 1 = z^2$;
3) Ако су x и y природни бројеви, онда је $2^x + 3^y = z^2$.

Сада је могуће прећи на <u>другу фазу</u> решавања проблема, а то је прављење плана. С обзиром да су задаци слични са сва три задатка већ виђени, план је да се прва две једначине решавају коришћењем производа (јер се $z^2 - 1$ може лако трансформисати у производ), а трећа даљом анализом и коришћењем конгруенција по модулу 3 и 4.

<u>Трећа фаза</u> је спровођење плана:

1) Ако је $z^2 - 1 = 3^y$, онда је $z + 1 = 3^к$ и $z - 1 = 3^{y-к}$. Тада је $3^к - 3^{y-к} = 2$, па је $3^{y-к}(3^{2к-y} - 1) = 2$. Дакле $y - к = 0$ и $3^{2к-y} = 3^к = 3$, па је $y = к = 1$. Једно решење проблема је $(0, 1, \pm 2)$.

2) Ако је $z^2 - 1 = 2^x$, онда је $z + 1 = 2^к$ и $z - 1 = 2^{x-к}$. Следи да је $2^{x-к}(2^{2к-x} - 1) = 2$. Тада је $x - к = 1$ и $2к - x = 1$, па је $x = 3$, $к = 2$, а решења проблема су $(3, 0, \pm 3)$.

3) Ако је $2^x + 3^y = z^2$, онда следи да је z непаран број и да је за $x = 1$, $z^2 = 3^y + 2$, што је немогуће, јер квадрати природних бројева при дељењу са 3 дају остатак 0 или 1.

Ако је $x \geq 2$, онда је очигледно $z^2 \equiv 1 \pmod 4$ и $2^x \equiv 0 \pmod 4$, па је тада и $3^y \equiv (-1)^y \equiv 1 \pmod 4$, што значи да је y паран број.

Слично је $z^2 = 2^x + 3^y \equiv 2^x \pmod 3$. Како је $z^2 \equiv 0$ или $z^2 \equiv 1 \pmod 3$, то је и x паран број. Тада је $2^{2a} + 3^{2b} = z^2$, па су 2^a, 3^b и z Питагорини бројеви. Следи да је $2^a = 2mn$, $3^b = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$, па је $m = 2^{a-1}$ и $n = 1$. Добија се да је тражена Питагорина тројка $(2^a, 3^b, z) = (2^a, 2^{2a-2} - 1, 2^{2a-2} + 1)$. Како једначина $3^b = 2^{2a-2} - 1$, има само једно решење $a = 2$ и $b = 1$, то су још два решења $(4, 2, \pm 5)$.

У <u>четвртој фази</u> се провером утврђује да сва добијена решења задовољавају полазну једначину. Δ